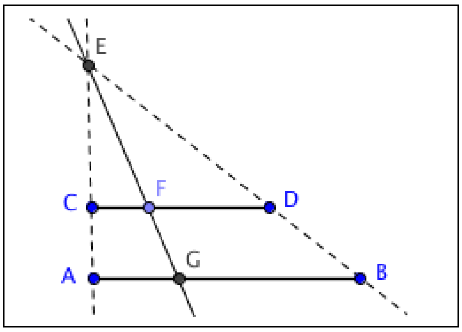
Sezione 1. – Le *pedine*, ossia gli enti fondamentali.

Si gioca con *punti, rette e piani.*
Rifletteremo su ciascuno di essi, cercando di comprendere quanto sia corretta l'idea che abbiamo in mente e quali possano essere le conseguenze ed i fraintendimenti per gli allievi.

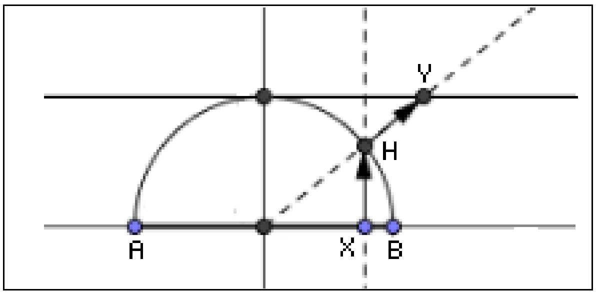
PUNTI. Che cos'è un punto?
Nell'immaginario nostro un punto è il segno lasciato da un tocco della matita su un foglio di carta, o il ricordino di una mosca sulla tovaglia, ma anche un oggetto che, pur grande, è lontanissimo ("*La nave ha già lasciato il porto e dalla riva sembra un punto lontano*"[1]), una stella nel cielo notturno.
Si parla di punto anche nel ricamo (*punto erba*), nei giochi (*primiera* e *settebello* sono *punti* a *scopa*), in grammatica (*punto e a capo*), nelle assemblee (*un punto all'ordine del giorno*).
Usiamo questa parola per indicare o un oggetto fisicamente di dimensioni trascurabili per il nostro occhio rispetto al contesto, oppure un qualcosa di unitario, con cui costruire una successione (un ricamo, un punteggio, una lista, ecc.).
Il punto di cui si parla in Geometria che cos'è?
Dice Euclide: "*Punto è ciò che non ha parti*".
Eppure, il segno di una matita sul foglio, visto al microscopio, appare come una nuvoletta di grafite, ciascun granello della quale è composto da atomi di carbonio, a loro volta costituiti da nucleo ed elettroni, a loro volta grumi di particelle più piccole (quark, ecc). Analogamente, la nave al cannocchiale mostra lo scafo, i fumaioli, ecc. Una stella nel cielo sappiamo per via indiretta che può essere grande centinaia di volte il nostro Sole. Sono buoni esempi di punti?
Sembrerebbe più "naturale" l'idea di punto come unità: l'unità con cui si costruiscono i numeri naturali, i punteggi, le misure. Pertanto, ogni segmento è costituito da tanti punti. Questa idea però non ha resistito alle scoperte dei pitagorici: se ogni segmento è formato da un numero elevato ma finito di punti, allora si arriva alla esistenza di due numeri interi ℓ e d tali che $d^2 = 2\ell^2$, contro l'unicità della fattorizzazione di un intero in numeri primi.

---
[1] Da "Un giorno dopo l'altro" di Luigi Tenco.



Anche se si fa cadere la finitezza del numero dei punti, si scopre facilmente che due segmenti qualsiasi, anche *differenti*, ne hanno la stessa *quantità*, ossia come insiemi di punti sono *equipotenti*: ad ogni punto F sul segmento CD corrisponde uno ed un solo punto G, intersezione di AB con la retta EF, e viceversa.

Persino ogni retta, come insieme di punti, è equipotente ad una semicirconferenza e ad un segmento: la costruzione qui a fianco deve addirittura escludere gli estremi A e B, quindi il segmento ha forse più punti che la retta?



Dunque, un punto che cos'è?

Euclide era un furbone. Anche se il suo scopo era costruire una teoria razionale, che riunisse tutta la Geometria nota fino a quel momento e fosse in grado di inglobare anche le scoperte successive, tuttavia cerca all'inizio di dare una interpretazione "fisica" alle pedine, allo scopo principalmente di accontentare i suoi lettori, cioè noi: nella realtà fisica il punto geometrico non esiste, ma lo idealizziamo come qualcosa di così piccolo che neppure il più potente micro/telescopio possa ingrandirlo.

$\boxed{\text{RETTE}}$. Che cos'è una linea retta?

Si può ripetere lo stesso discorso: un raggio di luce laser o un filo da cucito ben teso può darne un'idea, ma entrambi hanno uno spessore. Invece, una *linea* non dovrebbe averne, ma dovrebbe attraversare una *superficie* lasciandovi un punto.

Inoltre, che cosa significa "retta"? Linea *non curva*? Ma che cos'è una linea curva?

Forse la retta è definibile come il percorso più breve tra due suoi punti qualsiasi(2). Sulla superficie terrestre il percorso più breve tra due località è un tratto di cerchio massimo. Non è l'idea di retta che abbiamo in mente.

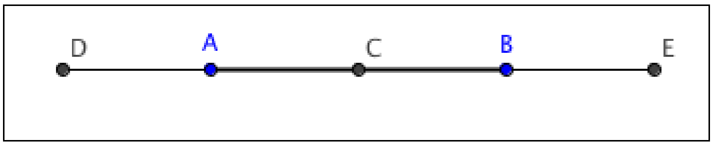
Forse un raggio di luce idealizzato può essere un modello di retta? Nella teoria della relatività generale di Einstein, le masse incurvano lo spazio, e la luce stessa viene deviata.

Allora, che cosa è una retta?

Di nuovo Euclide, furbescamente, dice più o meno che è un segmento che si prolunga all'infinito per diritto. La frase non vuol dire nulla, ma ci accontenta. Potremmo immaginare di partire da un *segmento* AB, prenderne il *punto medio* C, poi costruire due

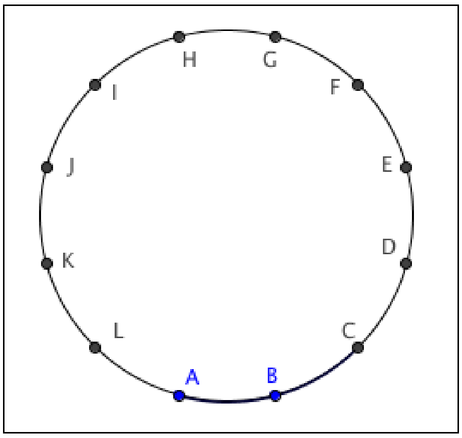
(2) I topologi chiamano *geodetica* una linea con questa proprietà.

segmenti DC e CE *uguali* ad AB e contenenti rispettivamente A e B, e proseguire idealmente e indefinitamente con questa costruzione a partire da DE, con segmenti via via *sovrapposti parzialmente*, quindi "sulla stessa retta".



Il problema è definire/costruire *il primo segmento*, e poi gli altri uguali …

Si noti di quante parole (*segmento, punto medio, uguali, sovrapposti parzialmente*) a priori non definite, abbiamo fatto uso per descrivere questo procedimento cervellotico.



Se applichiamo il procedimento di cui sopra ad un arco AC di circonferenza, dopo un numero finito di passi riotteniamo punti del "segmento" AC originario. La retta che abbiamo in mente dovrebbe però evitare di sovrapporsi o di incrociarsi con se stessa.
Ci sono altre curve che possiedono parti che si ripetono periodicamente (le sinusoidi, per esempio), ma non con *ogni* periodo come la retta e la circonferenza.

PIANO .Che cos'è un piano?

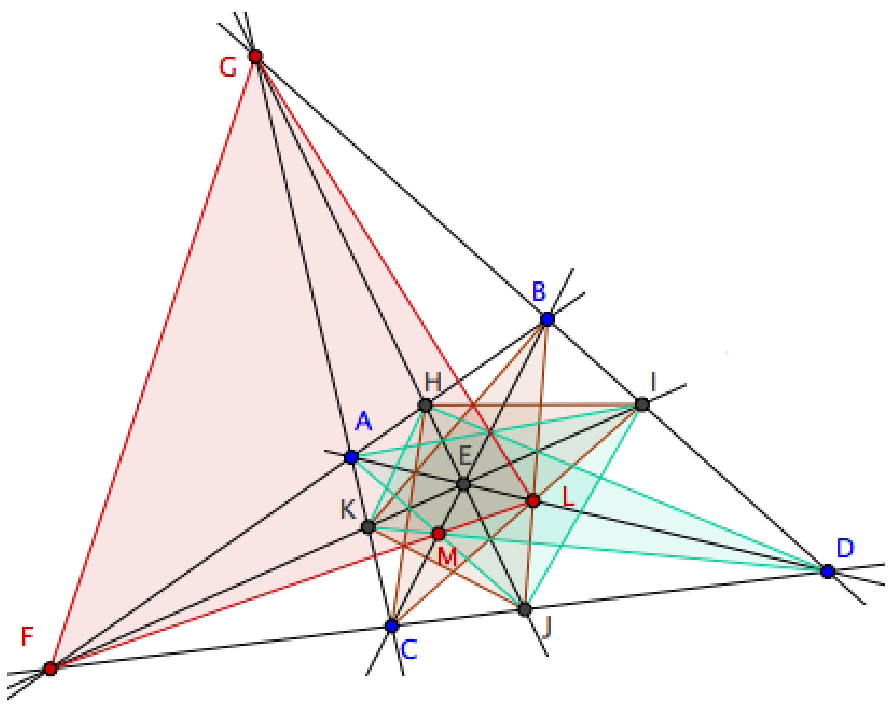
Il piano è l'idealizzazione di un foglio di carta: lunghezza e larghezza, ma non spessore. Però il foglio di carta deve essere *ben steso* per dare l'idea di piano. Che cosa vuol dire?
Con un foglio di carta di può fare un cilindro, un cono, o anche un nastro di Möbius, che ha una faccia sola. Che cosa vuol dire "ben steso"?
Il piano è un insieme di punti, ma anche di rette.
Anche il cilindro, il cono, il paraboloide iperbolico sono insiemi di rette. Però, nel piano, per ogni punto ci sono infinite rette, mentre negli altri casi solo una o due (per il vertice del cono ce ne sono infinite, ma è il solo punto con questa proprietà).

Qui, però, stiamo scivolando negli assiomi: *per ogni punto devono passare infinite rette.*
Questa è proprio la direzione euclidea: non definizioni di punto, retta, piano, ma tre insiemi di oggetti, le pedine del nostro gioco, ed una lista di *assiomi* o *postulati*, che stabiliscono che relazioni devono intercorrere fra di essi e che costituiscono le regole con cui giocare.
Forse gli assiomi sono stati scelti in modo da idealizzare modelli fisici come quelli che abbiamo esaminato, ma questo aspetto "semantico" è immediatamente abbandonato da

Euclide, per abbandonarsi al piacere intellettuale di manipolare le sue pedine, senza porsi il problema della loro esistenza o corrispondenza con la "realtà" fisica.
Che questa poi miracolosamente ci sia, che con la Geometria si costruiscano edifici, si scavino porti e gallerie, si misuri il diametro terrestre o la distanza Terra-Sole, si descrivano le orbite dei pianeti è un vantaggio supplementare, una motivazione per continuare più accanitamente il gioco.

Insomma, punti, rette e piani sono parole che designano oggetti qualsiasi, con cui giocare con le regole dettate dagli assiomi.

A questo punto, perché scegliere *proprio quelle* regole del gioco, quelle cioè più o meno correttamente indicate da Euclide? Se ne possono scegliere delle altre? Chi ce lo impedisce?
Negli ultimi secoli sono stati scoperti o inventati altri giochi con schemi simili: gli spazi proiettivi, ellittici, iperbolici, di Möbius, topologici; le terne di Steiner, le strutture d'incidenza, i grafi, e tanti altri, ciascuno dei quali ha poi prodotto risultati importanti ed applicazioni ai campi più svariati della nostra civiltà.



Nella figura qui accanto c'è una rappresentazione grafica originale del *piano proiettivo di ordine 3*: ci sono 13 punti e 13 "rette", cinque delle quali sono rappresentate dai contorni di triangoli colorati in vari colori; un lato di ciascuno contiene un punto interno. Le altre 8 sono costituite da quaterne di punti allineati.

Ogni punto appartiene a 4 "rette" ed ogni "retta" contiene 4 punti. Due punti distinti individuano una "retta" e una sola e due "rette" distinte hanno uno ed un solo punto comune.

Ma noi a scuola giochiamo il gioco di Euclide, magari quello rivisto da Hilbert o da altri.

Sezione 2. – Le regole del gioco.

Abbiamo in partenza tre insiemi di "pedine" o enti fondamentali: punti, rette, piani.
All'inizio del '900 era venuto di moda nella scuola operare da subito con tutti e tre questi tipi di oggetti. Questa corrente didattica si chiamò *fusionismo*. Però, la versione prevalente era ed è anche oggi scegliere inizialmente un piano unico, "il" piano, considerare i punti come i suoi elementi e le rette come suoi sottoinsiemi particolari. Questo costituisce la *Geometria piana*. Successivamente, si dovrebbe passare ad un altro insieme, detto *spazio*, che contiene i punti come suoi elementi, le rette ed i piani come particolari sottoinsiemi. Si ha allora la *Geometria solida*.

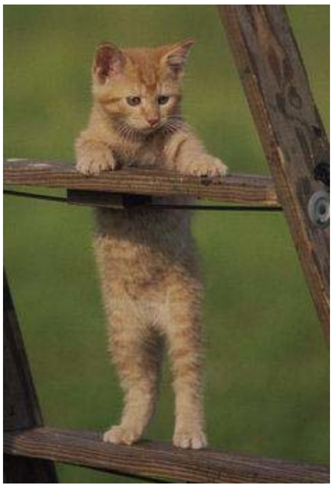
Partiamo dalla Geometria piana. Il piano è identificato con l'insieme dei punti. La difficoltà è individuare quei sottoinsiemi che corrispondono alle rette. Come visto, non si può fare direttamente, ma solo con un elenco di *postulati*, ossia di proprietà che le rette devono possedere, e che sono scelti con una certa arbitrarietà. In effetti, Euclide in questo non è sempre corretto, perché talora fa uso di proprietà che non ha dichiarato all'inizio, ossia fa un po' il "baro". Tuttavia, basta aggiungere alcuni postulati, come hanno fatto Hilbert, Peano o Choquet, per aggiustare il gioco.

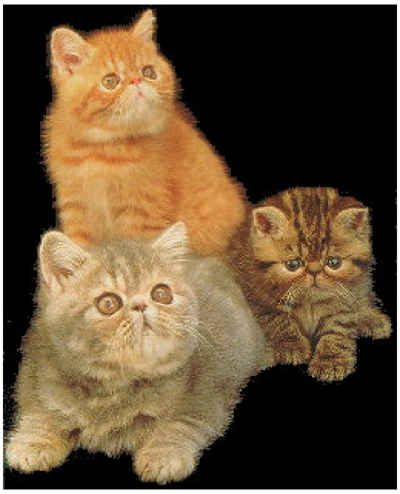
Euclide premette che per giocare si farà uso di *attrezzi*, come nel golf: la sua cassetta degli attrezzi, che egli chiama *assiomi*[1], è costituita dalle regole della *logica* diciamo *aristotelica*, accettate comunemente da tutti per dichiarare corretto un ragionamento.

Secondo la nostra tradizione, indichiamo i punti con lettere latine maiuscole A, B, C, P, Q, ... mentre le rette, le semirette, i segmenti si indicano con lettere latine minuscole a, b, c, r, s, t x, y .... Useremo poi lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \ldots$ per indicare angoli, curve, ecc.

DISEGNI . Poco corretto teoricamente, ma didatticamente molto utile è illustrare i concetti con disegni, che aiutino a visualizzarli ed a memorizzarli. Nella mia interpretazione, i disegni sono una forma di scrittura, di *comunicazione visiva*, che ha una sua *grammatica*, una sua *sintassi* ed una sua *semantica*.

(1) Ai nostri giorni consideriamo le parole *postulato* e *assioma* come sinonimi, ed in questo senso le useremo nel seguito.

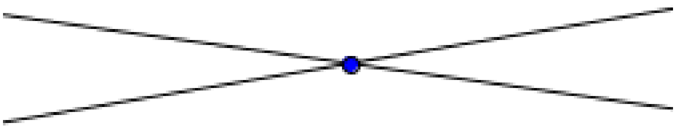




Queste ultime non sono mai esplicitate nei corsi di Geometria, ma si procede come nell'apprendimento della lingua naturale da parte di un bambino: indicando "cose" come quelle qui accanto, si usa la parola *gatto* e pian piano egli impara ad usare quel termine per ogni gatto che vede, anche di razze differenti.

La tacita convenzione per un punto è · oppure • e per una retta è ________________ , ma talvolta quest'ultima è anche preceduta e seguita da trattini o puntini, che dovrebbero dare l'idea che la retta prosegua oltre il disegno. Chissà se è chiaro per tutti gli allievi?

POSTULATI ALLA RINFUSA. Il primo postulato di Euclide stabilisce che due punti distinti appartengono ad una ed una sola retta.
Si usa dire che per due punti distinti "passa" una ed una sola retta.
In altre parole, due rette con due punti in comune coincidono.
Allora, detti A e B i due punti ed r la retta, possiamo denotare la retta anche con AB.
Ne segue che due rette distinte al massimo hanno un punto in comune. Se ce l'hanno, le chiamiamo *incidenti*, se no *parallele*.

	
Due rette incidenti in un punto	Come sono queste due rette? Sembrano parallele, ma sarà vero?

Chiaramente, fin qui il gioco potrebbe essere troppo banale: potrebbero esserci solo due punti ed una sola retta. Allora occorre postulare che ci siano almeno tre punti non appartenenti alla stessa retta. Ne segue che le rette sono almeno tre. Ma è troppo poco.
Allora proviamo a postulare l'esistenza di un quarto punto, tale che mai tre dei quattro punti appartengano ad una stessa retta. Così le rette sono almeno $\binom{4}{2} = 6$.

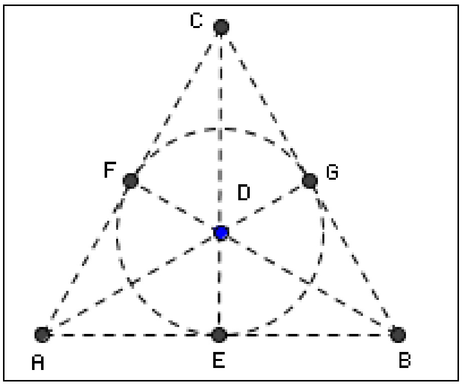
Riassumendo, abbiamo almeno i punti A, B, C, D e le rette AB, AC, AD, BC, BD, CD.

PARALLELE . Ora distinguiamo due casi: esistono o no rette parallele.

Ossia, postuliamo che due rette distinte abbiano in ogni caso un punto in comune, oppure che possano non averlo.

Sono due giochi diversi.

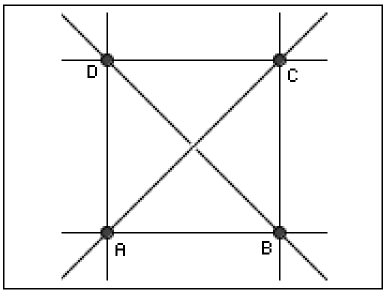
Nel primo, le rette AB e CD devono avere un punto comune, sia E. Anche le rette AC e BD devono averlo, sia F. Infine, anche le rette AD e BC hanno in comune un punto, sia G. I tre nuovi punti non coincidono coi quattro di partenza, perché due rette distinte hanno un solo punto in comune. Quindi abbiamo almeno una settima retta, EF.



Può accadere che la retta EF contenga G, quindi abbiamo sette punti e sette rette, senza parallele. Nella figura qui a lato, sei rette sono le terne di punti sui lati e sulle mediane del triangolo equilatero, mentre la settima è la terna di punti sulla circonferenza inscritta. Questa è una raffigurazione di un *piano proiettivo* detto *piano di Fano*. Notiamo che punti e rette hanno proprietà simili, *duali*: ogni retta ha tre punti e ogni punto appartiene a tre rette. Si potrebbero scambiare i ruoli di punti e rette ed avere la stessa geometria.

Abbandoniamo la Geometria Proiettiva, che pure è interessantissima, perché a scuola non è trattata. Allora permettiamo che possano esistere rette parallele.

In tal caso, abbiamo almeno quattro punti ed almeno sei rette.



Possiamo avere tre coppie di rette parallele, come nella figura qui accanto, e si tratta di un piano detto *affine*.

Anche questa figura non è realmente realizzabile nel piano euclideo, ma nel *reticolato* costituito dai punti a coordinate intere lo è. I punti sono $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(1,1)$, $D=(0,1)$. Le rette sono $y=x$ e $x+y+1=0$. Il punto intersezione avrebbe coordinate non intere $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, e quindi non esiste nel nostro reticolato.

Euclide, ad un certo punto della sua trattazione, inserisce un postulato, di formulazione non ovvia, dal quale discende la seguente affermazione:

Dati una retta r ed un punto P che non le appartiene, esiste (una ed)[1] *una sola parallela alla retta r e alla quale il punto P appartiene.*

Dunque, esistenza di rette parallele e unicità della parallela per un punto ad una retta data.

---

(1) Più avanti faremo discendere l'esistenza da altri postulati e teoremi.

Prima, però, egli cerca di spremere gli altri postulati al massimo, forse perché è consapevole che quel postulato porta a scegliere un tipo particolare di Geometria, escludendo le varie altre possibili.
Come noto dai corsi di Storia della Matematica, numerosi studiosi hanno cercato di "dimostrare" questa affermazione a partire dagli altri postulati, per liberare il testo euclideo da questo supposto neo. Tuttavia, anche chi ha creduto di riuscirci, di fatto ha sostituito inconsapevolmente a questo postulato qualche altro equivalente.
Noi qui ce lo teniamo, per ora con questa formulazione più comprensibile ed esplicita di quella originale euclidea.

NOTA. Se chiamiamo *parallele in senso debole* due rette r, s se coincidono o se non hanno punti comuni, grazie a questo postulato otteniamo una *relazione d'equivalenza* nell'insieme delle rette. Infatti, se due rette sono parallele in senso debole ad una terza retta, devono esserlo fra di loro, perché non possono avere un solo punto in comune. Le classi sono dette *fasci di rette parallele*, ma anche *punti impropri* del piano. L'insieme quoziente è detto *retta impropria* del piano. Se aggiungiamo al piano l'insieme dei punti impropri e all'insieme delle rette la retta impropria, otteniamo un nuovo piano senza parallele. La ragione è che sono soddisfatti i postulati di incidenza, ma non ci sono parallele, in quanto due rette ordinarie, se sono parallele appartengono allo stesso fascio e quindi allo stesso punto improprio. Ogni retta appartiene al suo fascio di parallele e quindi al suo punto improprio, in comune con la retta impropria. Due punti impropri individuano la retta impropria, ecc. Il piano che si ottiene è il *piano proiettivo reale*, derivato dalle scoperte sulla prospettiva degli artisti e geometri del nostro rinascimento (Filippo Brunelleschi, Piero della Francesca, Masaccio, Paolo Uccello, Leon Battista Alberti). Delle applicazioni artistiche di questi concetti geometrici si occupano i corsi di Disegno e Storia dell'Arte.

Nella nota precedente ho cercato di illustrare come il piano proiettivo sia molto naturalmente costruito a partire dal piano euclideo. Tuttavia, anche il piano di Fano ne è un esempio; in esso però le rette non sono conformi a quel che abbiamo in mente.
Occorre allora aggiungere altri postulati, che consentano di escludere sia i *piani finiti*, sia quelli *numerabili* o troppo "stravaganti" rispetto alle nostre attese. In particolare, vogliamo *ordinare totalmente* l'insieme dei punti di una retta e aggiungere anche quelle proprietà che Euclide dimentica di esplicitare, ma che poi usa sistematicamente.

$\boxed{\text{ORDINAMENTO DELLA RETTA}}$. Fissiamo una retta r e postuliamo che nell'insieme dei suoi punti si possa definire una relazione d'ordine[1] totale. Sarà sufficiente? Forse no.
Aggiungiamo che questo ordine non ha né massimo né minimo. Così, la retta è "aperta".

---

(1) Più oltre ci sarà un capitolo dedicato agli insiemi ordinati, che del resto sono in parte noti dai corsi del triennio.

Ovviamente, ogni ordine ha anche l'ordine opposto. Per ora non distinguiamo fra i due ordini.
Seguono le definizioni di *segmento* tra due punti A e B della retta, costituito dai punti che seguono A e precedono B (o viceversa); di *semirette* di origine A, ossia costituite dai punti che seguono A o rispettivamente che lo precedono. Vogliamo inoltre che nessun segmento contenga solo i suoi due estremi. Allora, tra due punti distinti ce ne sono altri, e quindi necessariamente infiniti. Ne viene che l'ordine che vogliamo sarà *denso*. Basterà?

Da Pitagora in poi sappiamo che il piano che abbiamo in mente non è costruito sui numeri razionali.
Spiegare perché sembra facile, l'ho già anticipato: vogliamo che valga il teorema di Pitagora, che implica la necessità di avere segmenti con rapporto irrazionale. Ma il teorema di Pitagora richiede il concetto di misura, di angolo retto, di uguaglianza. Fin qui siamo solo a livello di piano affine.
Comunque, vogliamo che la nostra retta non abbia "buchi". Dato che abbiamo un ordine totale, possiamo richiedere che sia *completo*, ossia che ogni sottoinsieme non vuoto e che abbia un confine superiore possieda *l'estremo superiore*.
Però a scuola non si insegna questa nozione, ma quella, equivalente, di *continuità* della retta.
Si potrebbe postulare che dati due insiemi non vuoti di punti sulla retta, presi in modo tale che ogni punto del primo insieme preceda ogni punto del secondo, (*insiemi separati*) esista almeno un *punto separatore* P che segua tutti i punti del primo insieme e preceda tutti quelli del secondo.
Si tratta di un postulato difficile, che Euclide evita di esplicitare, ma che poi usa nel modo seguente. Si prenda la semiretta di origine A formata dai punti che lo seguono. Si prendano due segmenti AB ed AC. Dato che l'ordine è totale, se B ≠ C uno dei due punti precede l'altro. Se B precede C, allora, il segmento AB è incluso nel segmento AC e diremo che AB è *minore* di AC.
Dati ora due insiemi non vuoti di segmenti di cui A è il primo estremo, se sono separati, ossia se ogni segmento del primo insieme è minore di ogni segmento del secondo insieme, esiste un segmento AP maggiore di tutti quelli del primo insieme e minore di quelli del secondo.
Il postulato, in questo modo, non parla di unicità, ma solo di esistenza.
La nozione che assicura l'unicità è quella di *insiemi contigui*. Di solito si definisce la *contiguità* in questo modo: due insiemi separati di punti sulla retta sono contigui se per

ogni segmento HK esistono un punto A del primo insieme ed un punto B del secondo tali che il segmento AB sia minore di HK.

Si usa cioè la possibilità di confrontare segmenti AB e HK con estremi diversi, sulla stessa retta o persino su rette diverse. Questa possibilità è data dalla *trasportabilità* di un segmento da una parte all'altra del piano.
In definitiva, occorre parlare di *uguaglianza* o *congruenza* o *isometria* nel piano: tre nomi usati storicamente per indicare confronti di figure, e che compaiono nei testi scolastici di epoche diverse.
Ma così i postulati si intrecciano tra loro, ed è difficile raggrupparli in modo facile da organizzare e ricordare. Perciò parlavo di postulati alla rinfusa.

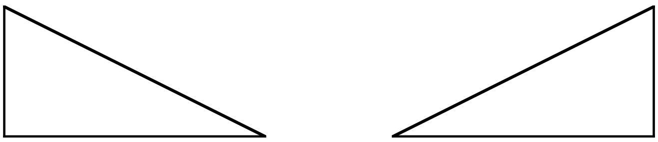
Chiamiamo *convessa* una figura tale che per ogni coppia di suoi punti distinti A, B, il segmento AB sia interamente incluso nella figura.

Non è una nozione euclidea, ma la usiamo subito.
Rette, semirette, segmenti, il piano sono figure convesse.
L'*intersezione* di figure convesse è banalmente convessa, perché due punti A e B nell'intersezione, appartenendo ad entrambe fanno sì che il segmento AB sia incluso in entrambe.

SEMIPIANI . Una proprietà difficile da catalogare, ma importante, è la seguente: se dal piano togliamo i punti di una retta r otteniamo due sottoinsiemi *non vuoti*, *disgiunti* e *convessi*.
Chiamiamo *semipiani aperti* i due sottoinsiemi ottenuti.
Se uniamo ad uno di essi i punti della retta r, otteniamo un *semipiano chiuso* di *origine* la retta r.
Di norma consideriamo chiusi i semipiani, di modo che il piano è unione dei due semipiani e questi si intersecano nei punti della retta r.
Se un punto A appartiene ad uno dei due semipiani aperti e un punto B all'altro, la retta AB interseca la retta r. Euclide lo dà per scontato, ma lo è?
Tutto dipende dal fatto che per ogni A appartenente al semipiano aperto α e per ogni B appartenente all'altro semipiano aperto β, esistano nel segmento AB altri punti diversi da A ed appartenenti ad α, ed altri punti diversi da B ed appartenenti a β.
Se questo è vero, ordiniamo la retta AB: l'insieme dei suoi punti che appartengono ad α, oltre che disgiunto da quello dei suoi punti appartenenti a β, è anche *separato* da esso, perché i semipiani sono convessi. Allora per la continuità di r, esiste un punto separatore P. L'unicità segue dal fatto che AB è unione disgiunta di

$AB \cap \alpha$, $AB \cap \beta$, $AB \cap r$. Se P appartenesse ad $AB \cap \alpha$, potremmo sostituire P ad A, quindi avere un segmento PB con un solo punto nel semipiano aperto α e tutti gli altri nel semipiano β, contro quello che abbiamo supposto vero. Idem se P appartenesse ad $AB \cap \beta$. Dunque, P è il punto intersezione di AB con r. L'ipotesi sui punti del segmento AB è un teorema o un altro postulato?

$\boxed{\text{CONGRUENZA}}$. Come definire quella che chiameremo *uguaglianza* o *congruenza* tra le *figure piane*, ossia tra i sottoinsiemi del piano? Il dire che due figure sono congruenti se sono *sovrapponibili con un movimento rigido* non significa nulla: che cos'è un movimento rigido?



Inoltre, nelle nostre aspettative credo ci sia la congruenza di due triangoli rettangoli con gli stessi cateti, anche se non sovrapponibili nel piano.

Perciò dobbiamo imporre degli assiomi.
Intanto, la congruenza dovrà essere una *relazione d'equivalenza*, è ragionevole. Così, ogni sottoinsieme del piano appartiene ad una ed una sola classe d'equivalenza. Poi:

- I punti[1] dovranno stare tutti e soli in una stessa classe d'equivalenza.
- Anche le rette dovranno stare tutte e sole in una stessa classe d'equivalenza.
- Idem per le semirette. Idem per i semipiani.
- **Postulato del trasporto di segmenti:** data una semiretta di origine A, per ogni classe di congruenza di segmenti deve esistere un punto B sulla semiretta, ed uno solo, tale che AB sia in quella classe.

Basteranno questi postulati? Forse no.
Per indicare che due figure sono congruenti userò classicamente il simbolo = .

$\boxed{\text{CIRCONFERENZA}}$. Possiamo definire *circonferenza* di centro C e *raggio* congruente al segmento AB l'insieme dei punti del piano P tali che il segmento CP sia congruente al segmento AB. Per il postulato del trasporto, su ogni semiretta di origine C un tal punto P esiste ed è unico. Allora, una retta contenente C interseca la circonferenza esattamente in due punti P e Q, uno per ciascuna delle due semirette. Il segmento PQ si dice *diametro* della circonferenza. Poiché PC = CQ, C è il *punto medio* del diametro PQ.
Chiamiamo poi *cerchio* l'insieme dei punti appartenenti ai segmenti CP, con P sulla circonferenza.
Che cosa vogliamo che succeda? Le prossime affermazioni sono assiomi o teoremi?

[1] Punti qui intesi come *singoletti*, ossia insiemi con un solo elemento.

"Tutti i diametri di una stessa circonferenza sono congruenti fra loro. Tutte le circonferenze di dato raggio costituiscono una classe di congruenza. Tutti i cerchi di dato raggio costituiscono una classe di congruenza."

NOTA. Molte linee presentano la proprietà dell'esistenza di un punto C, che possiamo chiamare *centro*, tale che ogni retta per C intersechi la linea in due punti P, Q di cui C è il punto medio. Sono le linee dotate di *simmetria centrale*. Tra queste tutti i poligoni regolari con un numero pari di lati, ellisse, iperbole, ecc.

FIGURE LIMITATE. Una figura piana è detta *limitata* se si può includere in un cerchio, ossia se esiste un punto O ed un raggio AB, tale che ogni punto Q della figura è tale che $OQ < AB$.

Ovviamente una circonferenza, un cerchio ed un segmento sono limitati, mentre una semiretta, una retta, un semipiano no.

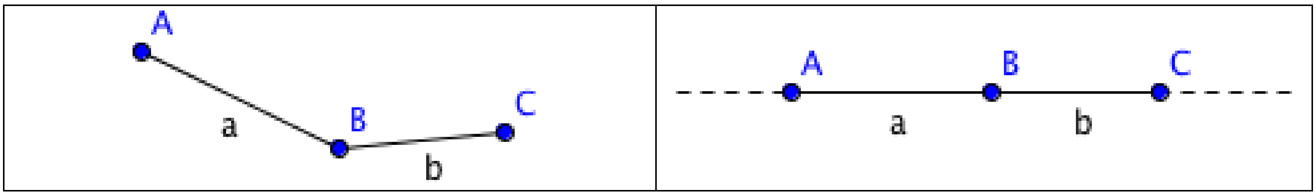
SOMMA E CONFRONTO DI SEGMENTI. Abbiamo già visto che i segmenti sono ripartiti in classi di congruenza, diciamo così, *geometrica*. In Algebra il termine *congruenza* indica una relazione d'equivalenza compatibile con una *operazione binaria*.

In questo caso possiamo recuperare il significato algebrico definendo opportunamente una *addizione* fra segmenti.

Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno come intersezione un estremo.

Due segmenti consecutivi sono detti *adiacenti* se appartengono alla stessa retta.

Nella figura vediamo come si usa rappresentare i due casi



Dati i segmenti adiacenti AB e BC, chiamiamo loro *somma* il segmento AC.

Scriviamo $AC = AB + BC$.

Dato ora un segmento CD consecutivo ad AC, possiamo calcolare

$$AD = AC + CD = (AB + BC) + CD$$

Ma anche BC e CD sono adiacenti, quindi $BC + CD = BD$. Allora

$$AD = AB + BD = AB + (BC + CD)$$

e quindi questa somma è associativa.

Se non sono adiacenti, due segmenti AB e CD si possono sommare?

Poiché per ogni semiretta a di origine un punto O esiste un punto P tale che OP è congruente ad AB, e poiché anche nella semiretta di origine P e non contenente O esiste un punto Q tale che PQ è congruente a CD, ed i segmenti OP e PQ sono adiacenti, chiamiamo *somma* di AB e CD il segmento $OQ = OP + PQ$.

Ovviamente non abbiamo una operazione, perché ci sono infiniti risultati, uno per ogni punto O e per ogni semiretta uscente da O.

Siano O' un altro punto, a' una semiretta di origine O', P' su di essa tale che O'P' sia congruente ad AB e sia Q' su a' tale che P'Q' sia congruente a CD e adiacente ad O'P'. La somma di AB e CD è in questo caso $O'Q' = O'P' + P'Q'$.

Tutto va a posto se O'Q' è congruente ad OQ.

Ossia, tutto va bene se c'è la compatibilità tra addizione e congruenza.

In ogni caso **la postuliamo** e quindi, dati due segmenti, dovunque li sommiamo otteniamo un'unica somma, a meno di congruenze.

- La proprietà associativa allora vale, come visto.
- Con un po' di ragionamenti, si possono ottenere anche la proprietà commutativa e la legge di cancellazione.
- La classe dei punti, intesi come *segmenti degeneri*, può fungere da elemento neutro.
- Allora, abbiamo un *monoide* commutativo e con la legge di cancellazione.

ORDINAMENTO DEI SEGMENTI. Se due segmenti OP ed OQ sono sulla stessa semiretta di origine O, e P precede Q, diciamo che OP è minore di OQ. Allora otteniamo fra questi segmenti un ordine totale, denso e continuo come quello fra i punti della semiretta.

Possiamo anche dire che ordiniamo i segmenti della semiretta con un estremo in O mediante l'inclusione.

Ancora meglio, possiamo osservare che OP ≤ OQ se e solo se $OQ = OP + PQ$.

Allora, dati due segmenti AB e CD, presa una semiretta di origine O e due punti P e Q su di essa, tali che OP = AB e OQ = CD, poniamo AB ≤ CD se OP ⊆ PQ.

Ma questo significa che $CD = AB + PQ$, quindi l'ordinamento si può definire tramite l'addizione. Poiché abbiamo postulato che quest'ultima sia compatibile con la congruenza anche l'ordinamento fra segmenti lo è, quindi abbiamo un ordine totale, denso e completo nell'insieme delle classi di congruenza di segmenti.

Inoltre dati quattro segmenti AB, CD, A'B' e C'D', se $AB \le A'B'$ e $CD \le C'D'$ allora $AB + CD \le A'B' + C'D'$. Inoltre, ciascun segmento è minore della somma con altri segmenti non degeneri. Dunque, abbiamo quello che chiameremo il *monoide additivo regolare ordinato* dei segmenti. Il minimo è il segmento degenere e non c'è il massimo.

NOTA: Possiamo ora rispondere ad una delle domande poste in precedenza: poiché tutti i raggi di una circonferenza sono congruenti fra loro, lo sono anche i diametri, perché somma di due raggi. Questo è dunque ora un corollario.

DIFFERENZA. Dati due segmenti AB e AC, sulla stessa semiretta, se B precede C il segmento AC è maggiore del segmento AB. Il segmento BC è detto *differenza* di AC e AB, si denota con AC-AB e si ha: $AC = AB + BC = AB + \left(AC - AB\right)$. Poniamo $AB - AB = A$ (segmento degenere).

Ricordo che tutto ciò si esegue in realtà fra le classi di congruenza.

MULTIPLI. Dato un segmento AB, sulla semiretta di origine A e contenente B possiamo prendere un segmento BC congruente ad AB; poniamo AC = 2AB. Analogamente possiamo partire da C ed ottenere un segmento CD congruente ad AB. Allora, AD = 3AB, e così via: dunque, per ogni $n \geq 1$ abbiamo un segmento (n+1)AB = nAB+AB.

Aggiungiamo 1AB = AB e, volendo, 0AB = A (segmento degenere).

Questi segmenti nAB sono detti *multipli (naturali)* di AB.

I multipli di AB hanno le consuete proprietà delle potenze, e qualche collegamento con l'ordine. In particolare, per ogni m, n∈**N** e per ogni coppia di segmenti AB e CD:

- (m+n)AB = mAB+nAB
- (m·n)AB = m(nAB)
- m(AB+CD) = mAB+mCD
- nAB < (n+1)AB
- mAB < nAB ⇔ m < n
- mAB < mCD ⇔ AB < CD

Inoltre, vale la seguente proprietà, nota come *proprietà di Archimede*:

Dati due segmenti non degeneri AB e CD, esiste un numero naturale n tale che CD < nAB.

Dimostrazione[(1)]. Se AB ≥ CD basta prendere n = 2. Sia AB < CD e supponiamo falsa la proprietà. Consideriamo i segmenti tutti su una stessa semiretta r, con un estremo nell'origine O. Allora consideriamo l'insieme non vuoto $\mathcal{S}$ dei punti Q tali che OQ sia maggiore di ogni multiplo di AB. Consideriamo poi l'insieme $\mathcal{R}$ dei punti R tali che esiste n∈**N**, tale che OR ≤ nAB. Anche $\mathcal{R}$ non è vuoto, perché contiene un punto H tale che OH = AB. I due insiemi $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ sono separati. Dato che l'ordine sulla retta è continuo, tra questi

(1) Questa e molte altre dimostrazioni che seguiranno sono ideate da me come se si trattasse di svolgere una ricerca su questi argomenti, coerentemente con l'impostazione sperimentale di questa prima parte. Pertanto, potrebbero non essere del tutto esatte esatte e certamente ne esistono altre più brevi o didatticamente più comprensibili per gli allievi della scuola secondaria. Gli studenti del modulo sono invitati a fare opera di verifica e confronto con altri testi e trattati.

sottoinsiemi di punti esiste un elemento separatore, sia P. I punti R tali che OR = nAB appartengono ad $\mathcal{R}$, quindi sono tutti minori o uguali a P. Se OP = nAB, allora (n+1)AB > OP, quindi P non sarebbe elemento separatore fra $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$. In particolare, OP > AB. Allora, nella semiretta di origine P e contenente O esiste un punto H tale che PH è congruente ad AB. Allora H è un punto di $\mathcal{R}$. Ne segue che esiste n tale che $nAB > OH$. Ma allora $(n+1)AB = nAB + AB > OH + AB = (OP - AB) + AB = OP$, assurdo. Pertanto, P non esiste, l'insieme $\mathcal{S}$ è vuoto il teorema è dimostrato.

$\boxed{\text{SOTTOMULTIPLI}}$. Siano dati un segmento AB ed un numero naturale n ≥ 2. Esiste un segmento CD tale che AB = nCD.

Per dimostrarne l'esistenza, possiamo trasportare tutti i segmenti sulla semiretta di origine A e contenente B, poi procediamo per passi:

a) Esiste un punto H tra A e B tale che 2AH ≤ AB. Infatti, tra A e B ci sono infiniti punti H. Preso uno di essi, se 2AH = AB siamo a posto; se no, per esempio AH < HB. Allora esiste K tra H e B tale che HK = AH e HB = HK+KB. Ne segue: 2AH = AH+HK = AK < AK+KB = AB.

b) Per ogni n ≥ 2 esiste un punto H tra A e B tale che nAH ≤ AB. Infatti, è vero per n = 2. Per induzione, sia vero per n ≥ 2 e dimostriamolo per n+1. Per l'ipotesi induttiva esiste M tale che nAM ≤ AB. Per il passo a) esiste H tra A ed M tale che 2AH ≤ AM. Allora, $(n+1)AH < 2nAH = n(2AH) \le nAM \le AB$.

c) Consideriamo l'insieme $\mathcal{R}$ dei punti R di AB tali che nAR ≤ AB e l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti S di AB tali che nAS > AB. Per il passo b) $\mathcal{R}$ non è vuoto. Neppure $\mathcal{S}$ è vuoto, perché contiene B. Inoltre, $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ sono separati, perché nAR ≤ AB < nAS. Sia P un elemento separatore. Se nAP = AB siamo a posto. Se invece per esempio nAP < AB, allora per il lemma b) esiste H tale che nAH ≤ (AB-nAP). Sulla semiretta di origine P contenente B prendiamo un punto K tale che PK = AH. Allora $nAK = n(AP + PK) = n(AP + AH) = nAP + nAH \le nAP + (AB - nAP) = AB$, quindi K∈$\mathcal{R}$ pur seguendo P, assurdo. Similmente si ragiona se nAP > AB. Allora nAP = AB.

CD è detto *sottomultiplo n-esimo* di AB e denotato con $\frac{1}{n}AB$.

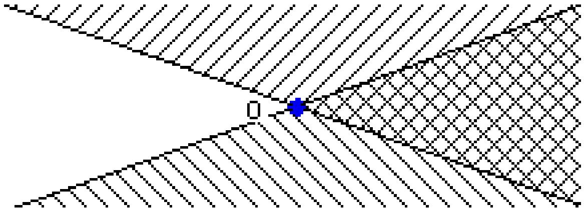
Allora, in particolare per n = 2, ogni segmento ha il *punto medio*.

Più avanti vedremo come costruire il segmento $\frac{1}{n}AB$ con riga e compasso.

A questo punto, per ogni frazione positiva $\frac{m}{n}$ possiamo definire $\frac{m}{n}AB = m\left(\frac{1}{n}AB\right)$, poi dimostrare che è congruente a $\frac{1}{n}(mAB)$ e che $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \Rightarrow \frac{m}{n}AB = \frac{m'}{n'}AB$.

$\boxed{\text{ANGOLI}}$. Gli *angoli* sono una delle nozioni più difficili da spiegare. Una possibile definizione è la seguente.

Prendiamo due rette incidenti in un punto O. Per ciascuna fissiamo uno dei due semipiani. Chiamiamo angolo (convesso) l'intersezione dei due semipiani.

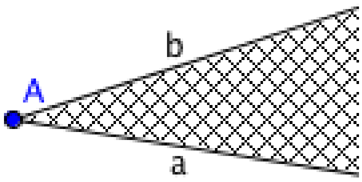


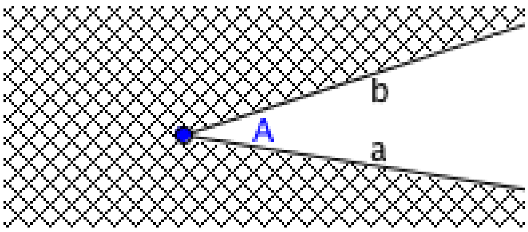
Ne segue che con quella definizione ogni angolo è una figura convessa non limitata. Comunque, esso contiene il punto O, detto *vertice*, una semiretta di origine O per ciascuna retta, e queste semirette sono dette *lati* dell'angolo.

Dalla convessità segue che preso un punto su ciascun lato, il segmento che li congiunge è incluso nell'angolo; inoltre, ogni semiretta che congiunge il vertice con un punto di quel segmento è a sua volta inclusa nell'angolo.

Questa definizione comprende tutti i casi che abbiamo in mente?

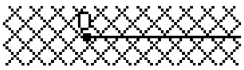
Per estendere la definizione di angolo, possiamo considerare la figura complementare di un angolo convesso, gli uniamo il vertice e i due lati ed otteniamo una figura non convessa, che chiamiamo *angolo esplementare* dell'angolo dato: ha gli stessi lati a e b, lo stesso vertice A, e l'unione dei due è tutto il piano.



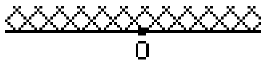


Inoltre, possiamo chiamare angolo anche una semiretta di origine O (*angolo nullo*, coi lati sovrapposti) ed il suo angolo esplementare, che comprende tutto il piano e che chiameremo *angolo giro* di vertice O. Infine, fissato un punto O su una retta, chiamiamo *angolo piatto* di vertice O ciascuno dei due semipiani. In questo modo, un angolo piatto è congruente al suo esplementare ed entrambi sono convessi I suoi lati sono le due semirette di origine O della stessa retta.

angolo nullo



angolo giro

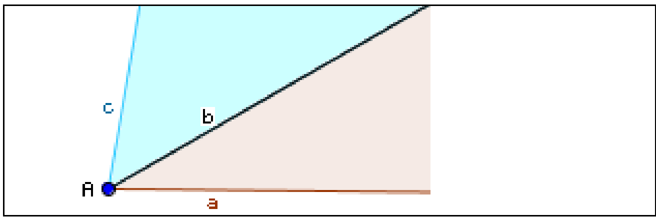


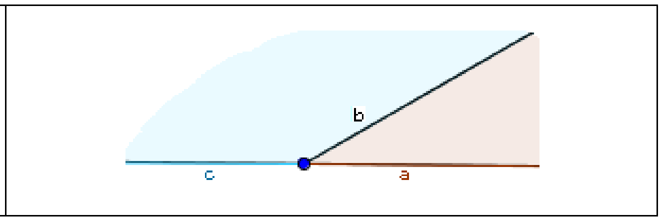
angolo piatto

Diremo *consecutivi* due angoli convessi se hanno come intersezione un lato.

Diremo *adiacenti* due angoli convessi consecutivi se gli altri lati sono sulla stessa retta.

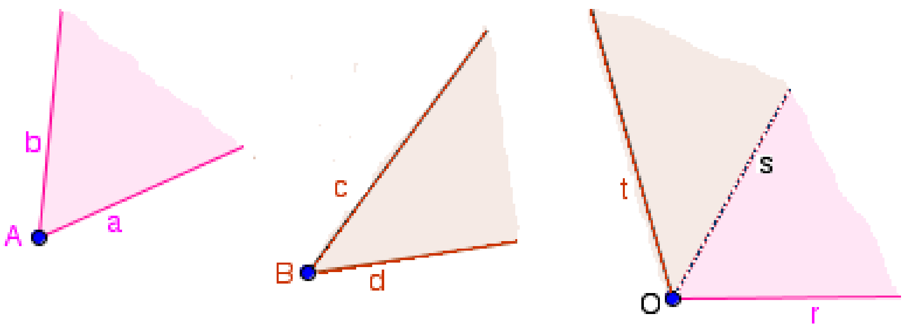
Nella figura seguente c'è il consueto modo di rappresentarli.





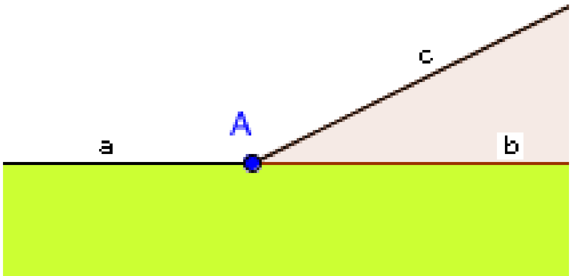
Se i due angoli adiacenti sono congruenti, li chiameremo *angoli retti*. Esistono?

Nel caso di due angoli convessi consecutivi di vertice A e lati ab e bc, chiamiamo *somma* dei due angoli l'angolo ac. Ossia, $ac = ab + bc = ab \cup bc$.
La somma di due angoli adiacenti è allora un angolo piatto.
La somma di due angoli convessi sarà definibile anche per angoli non consecutivi?
Dato un angolo convesso ab, una semiretta r di origine O e fissato uno dei due semipiani determinati dalla retta di r, dobbiamo postulare che in esso esista una ed una sola semiretta s tale che l'angolo rs sia congruente ad ab (*postulato del trasporto di angoli*).
Possiamo allora considerare due angoli convessi ab e cd e renderli consecutivi. Partiamo da un punto, O, una semiretta r per O e su uno dei due semipiani costruiamo un angolo rs congruente ad ab. Poi, a partire da O, da s e dal semipiano non contenente r, costruiamo un angolo rt congruente a cd.



Possiamo definire la somma rt e considerarla somma di ab con cd?
Come per i segmenti, tutto dipende dalla compatibilità con la congruenza.
Se partiamo da un altro punto O', una semiretta r' di origine O' e da uno dei due semipiani determinati da r', la costruzione precedente ci dà una somma r't', che *vogliamo* (postuliamo) sia congruente con rt.
Allora la somma ab+cd è definita a meno di congruenze.
La classe degli angoli nulli, ossia delle semirette, fa da elemento neutro.
Vorremmo anche la proprietà commutativa e la legge di cancellazione.
Qui però c'è un problema: l'insieme degli angoli convessi non è chiuso rispetto alla somma.

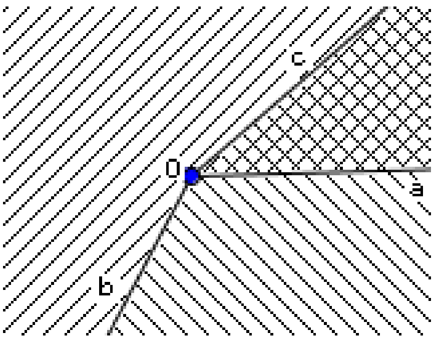
Basta considerare un angolo convesso bc e l'angolo piatto ab con lo stesso vertice, ottenuto prolungando il lato b e nel semipiano opposto. La somma, ossia l'unione, non è un angolo convesso.



Allora occorrerebbe prolungare la definizione di somma anche ad angoli qualunque.
Ma se prendiamo due angoli *concavi*, con un lato in comune, l'intersezione non può ridursi comunque a quel lato. Per esempio, la somma di un angolo ab con l'angolo giro di lato b dà tutto il piano, ossia l'angolo giro stesso, che è in tal modo *elemento assorbente*.
Allora con questa impostazione, abbiamo un monoide commutativo, ma con elemento assorbente, l'angolo giro. Ogni angolo sommato con l'esplementare dà l'angolo giro.
Ecco un modello finito di questo tipo di situazione: qui il simbolo ∞ significa "molti".

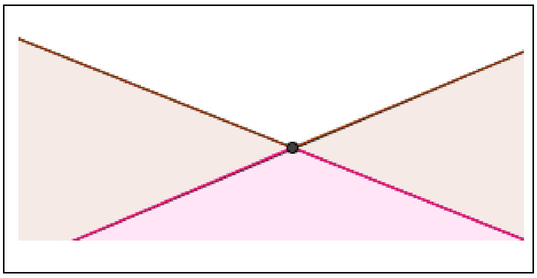
+	0	1	2	3	∞
0	0	1	2	3	∞
1	1	2	3	∞	∞
2	2	3	∞	∞	∞
3	3	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞

Come cambiare questa situazione? O definire diversamente gli angoli o definire diversamente la somma.



Dati come in figura gli angoli ab e bc, di vertice 0, consecutivi perché hanno il lato b in comune, ma col primo angolo non convesso, la somma definita come unione è l'angolo giro di vertice O. Ma potremmo chiamare somma l'*intersezione* dei due angoli, (escluso il lato b privato dell'origine O) ossia l'angolo ac. Quindi, se la somma è minore dell'angolo giro si fa l'unione; se è maggiore o uguale, si fa l'intersezione eliminandone, come detto, il lato comune "aperto". In tal modo, l'angolo giro non è più elemento assorbente.
Con questa nuova definizione, la somma di un angolo con l'esplementare è l'angolo nullo, quindi ogni angolo ha il simmetrico e si ha un *gruppo abeliano*. Ne segue la legge di cancellazione.
Sarà didatticamente e logicamente l'unica soluzione? Se ce ne sono altre, è la migliore?

Due rette incidenti in un punto O formano quattro angoli convessi. Quelli che hanno per lati semirette distinte sono detti *opposti al vertice*. Quelli che hanno un lato in comune sono adiacenti, quindi la loro somma è un angolo piatto.



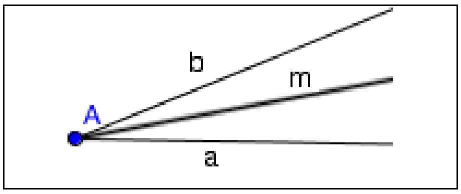
La legge di cancellazione, che in un gruppo vale automaticamente, dà come conseguenza che due angoli opposti al vertice sono congruenti, perché adiacenti ad uno stesso angolo, col quale danno somme congruenti ad un angolo piatto.

Come per i segmenti, anche per gli angoli si possono definire i multipli ed i sottomultipli, e dimostrare che per ogni angolo α e per ogni n intero ≥ 1 esiste un angolo, detto sottomultiplo n-esimo $\beta = \frac{1}{n}\alpha$, tale che $n\beta = \alpha$.

In particolare, per n = 2 si ottiene un angolo metà dell'angolo dato.

Allora esistono gli angoli retti, metà degli angoli piatti e sono tutti congruenti tra loro.

Dato l'angolo $\alpha = ab$ di vertice A, la semiretta m per A tale che l'angolo am sia metà di ab, è detta *bisettrice* di ab. L'angolo mb è congruente all'angolo am.



ORDINAMENTO DEGLI ANGOLI Nell'insieme degli angoli si può definire una relazione d'ordine nel modo seguente: dati gli angoli convessi $\alpha = rs$, $\beta = uv$, sul semipiano di origine la retta del lato r e contenente s possiamo costruire un angolo rt congruente a β e con lo stesso vertice di α. Poniamo $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq rt$. In questo caso, r è interna all'angolo rt, e si può scrivere $rt = rs + st$. Allora, la compatibilità fra addizione e congruenza rende questa relazione compatibile a sua volta con la congruenza.

Per estendere questa relazione a tutto l'insieme delle classi di congruenza di angoli, aggiungiamo che ogni angolo convesso è $\leq$ dell'angolo piatto, mentre ogni angolo concavo è maggiore dell'angolo piatto. Infine, dati due angoli concavi α, β, si considerino i loro esplementari α', β', che sono convessi, e poi si ponga $\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta' < \alpha'$.

In questo ordine, il minimo è l'angolo nullo ed il massimo è l'angolo giro.

Questo ordine è quindi legato in ogni caso all'inclusione, ma non all'addizione di angoli. Infatti, la presenza nel gruppo additivo di elementi di periodo finito (l'angolo piatto, l'angolo retto) rende impossibile questa compatibilità, dato che nella somma l'angolo giro coincide con l'angolo nullo: per esempio, i multipli di un angolo potrebbero essere minori dell'angolo.

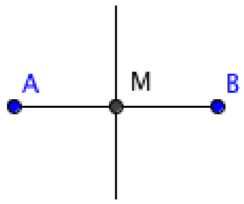
Dunque, a differenza dei segmenti, che costituiscono un *monoide ordinato*, gli angoli costituiscono un insieme totalmente ordinato, denso, continuo, ma non un gruppo ordinato.

RETTE PERPENDICOLARI. Due rette si dicono *perpendicolari* se sono incidenti e formano quattro angoli retti.
In realtà ne basta uno, perché gli altri tre o gli sono adiacenti oppure opposti al vertice.
Ne esistono, perché la bisettrice di un angolo piatto appartiene ad una retta perpendicolare alla retta dei lati.

La relazione di perpendicolarità è antiriflessiva, ma è simmetrica. Sarà transitiva? Ossia, una retta s perpendicolare ad una retta t perpendicolare ad una data retta r sarà perpendicolare ad r? Per ora non possiamo rispondere, ma vedremo nella prossima sezione la risposta.

Problema: Data una retta r ed un punto P non appartenente ad r, esiste una perpendicolare ad r e contenente P?

ASSE DI UN SEGMENTO.



Dato un segmento AB ed il suo punto medio M, la bisettrice dell'angolo piatto di vertice M e lati sulla retta AB si chiama *asse* del segmento AB. È perpendicolare al segmento AB.

ARCHI E SETTORI CIRCOLARI. Dato un angolo di vertice O ed una circonferenza di centro O, i lati dell'angolo contengono ciascuno un punto della circonferenza, siano A e B. L'intersezione tra angolo e circonferenza è detta *arco* $\overset{\frown}{AB}$. L'intersezione tra angolo e cerchio è detta *settore circolare* AOB.
Un angolo col vertice nel centro di una circonferenza è detto *angolo al centro.*

Le proprietà che richiediamo sono che angoli al centro congruenti determinino sia archi sia settori congruenti.

Due angoli al centro consecutivi determinano *archi consecutivi.* Possiamo definire la loro somma come l'arco corrispondente alla somma dei rispettivi angoli al centro.
Due punti su una circonferenza, congiunti col centro, determinano due angoli, esplementari fra loro, quindi con somma l'angolo giro. Allora, i due punti determinano due archi, la cui somma è l'intera circonferenza.
Per la somma, si può quindi operare sugli archi di una circonferenza come sugli angoli.
Se si identifica l'intera circonferenza con un punto, si ottiene un gruppo isomorfo a quello degli angoli modulo l'angolo giro.

Sezione 3. – Ora giochiamo.

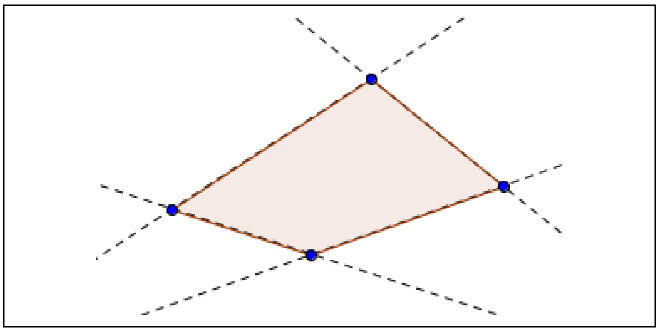
Forse non abbiamo terminato con le regole del gioco, forse servirà qualche altro postulato, ma non importa. Se il gioco dovesse finire troppo presto in uno stallo, o non soddisfacesse le nostre attese, aggiungeremo nuove regole ragionevoli e concordate per poter proseguire. Speriamo solo non siano *contraddittorie* con quelle che abbiamo già introdotto.

POLIGONI. Dato un insieme finito di punti distinti, numerati in successione, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ consideriamo i segmenti A_iA_{i+1}, $1 \le i \le n-1$: il primo è consecutivo col secondo, il secondo col primo e col terzo, ecc., e l'ultimo col penultimo.
Per definizione, ogni punto A_i è estremo di al massimo due segmenti.
Escludiamo il caso di segmenti A_iA_{i+1} e $A_{i+1}A_{i+2}$ adiacenti. Chiamiamo *poligonale* questa successione di segmenti.
La poligonale è detta *chiusa* se aggiungiamo anche il segmento A_1A_n, purché sia rispettata la condizione di non adiacenza. In tal caso, i punti sono detti *vertici* e i segmenti *lati*.
È detta s*emplice* se i lati non hanno altri punti in comune tra loro oltre agli estremi, ed ogni vertice appartiene solo a due lati.

Un piccolo quesito: quanti sono i segmenti che congiungono gli n vertici?
Chiamiamo *diagonali* i segmenti che congiungono vertici, ma che non sono lati. Ogni vertice appartiene a due lati e a n-3 diagonali. I vertici sono n in tutto, ma ogni diagonale ha due estremi, quindi ci sono $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonali. Allora, contando anche gli n lati, abbiamo in totale $\frac{n \cdot (n-3)}{2} + n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ segmenti che congiungono i vertici.

L'insieme complementare di una poligonale semplice e chiusa è unione disgiunta di due sottoinsiemi, una delle quali limitata. Assioma o teorema?

Con questa proprietà, possiamo chiamare *poligono* la parte di piano limitata determinata dalla poligonale semplice chiusa, unita con la poligonale stessa.
Se non vogliamo ricorrere a questa proprietà, che per ora è in una "zona grigia" di questa Geometria, possiamo limitarci a definire i poligoni convessi, come segue.



Se una poligonale semplice chiusa ha la proprietà che per ogni lato, la retta che lo contiene determina un semipiano che contiene ogni altro vertice, chiamiamo *poligono convesso* l'intersezione di questi semipiani.

Poiché i semipiani sono figure convesse, ogni poligono convesso è una figura convessa.

In particolare, le sue diagonali sono tutte contenute nel poligono.

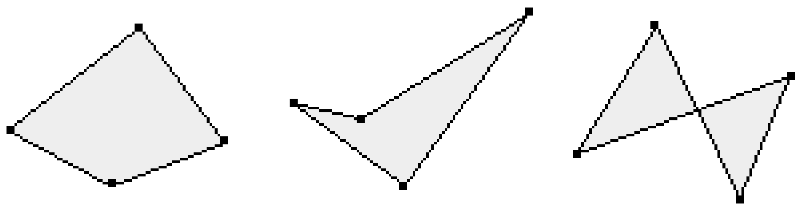
Inoltre, in ogni vertice i due lati determinano un angolo convesso che contiene il poligono, e che è chiamato *angolo (interno)* del poligono convesso.

Allora, il poligono convesso è anche l'intersezione dei suoi angoli interni.

Inversamente, l'intersezione di angoli convessi, se è limitata, è un poligono convesso.

Un poligono semplice non convesso ha almeno un angolo concavo, ed è detto talora *concavo*.

Una poligonale chiusa non semplice viene detta talora *poligono intrecciato*. Il suo insieme complementare è unione disgiunta di più di due sottoinsiemi, di cui uno non limitato. Nella figura abbiamo tre *quadrilateri*, uno per ogni tipo.



convesso concavo intrecciato

Nel seguito la parola *poligono* significherà *poligono convesso*, salvo precisazioni.

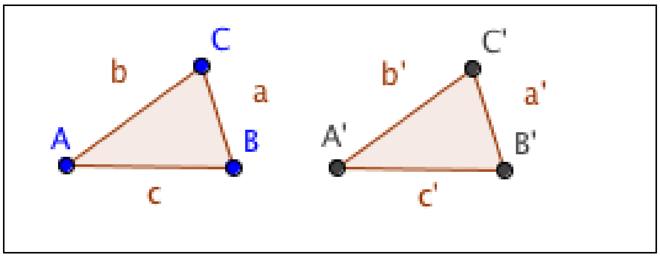
Chiamiamo *regolare* ogni poligono i cui lati sono congruenti e i cui angoli sono congruenti.

Esistono?

TRIANGOLI. I *triangoli* hanno tre lati e tre angoli. Siano A, B, C i tre vertici. Allora i lati sono AB, AC, BC. Possiamo denotare l'angolo di vertice A anche con $B\hat{A}C$ e analogamente con gli altri.

Naturalmente, ci si aspetta che se due triangoli ABC, A'B'C' sono congruenti, allora ci sia una biiezione tra i loro insiemi di vertici, quindi anche fra gli angoli ed i lati, tale che angoli corrispondenti e lati corrispondenti siano congruenti.

Ma questo è un postulato.



Alcuni testi pongono ora come <u>postulato</u> anche il seguente:

Due triangoli ABC, A'B'C' sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso: c = c', b = b', BÂC = B'Â'C'.

In generale, questo è chiamato "**primo criterio di congruenza dei triangoli**".

I triangoli si possono classificare rispetto ai lati in tre modi diversi.

- *equilateri*: i tre lati sono congruenti
- *isosceli*: (*almeno*?) due lati sono congruenti
- *scaleni*: i tre lati sono a due a due non congruenti.

Da un testo (e da un test) all'altro, la definizione di triangolo isoscele può variare, a seconda che ci sia o no quell'*almeno*. In un caso, la classificazione dà una partizione dell'insieme dei triangoli in tre blocchi, nell'altro i triangoli equilateri sono un caso particolare di triangoli isosceli. Personalmente preferisco quest'ultima, un po' ibrida, ma ben motivata.
Un sondaggio in aula durante il corso ha confermato a grande maggioranza questa mia preferenza. Tuttavia, secondo me ogni insegnante dovrebbe, magari in accordo col libro di testo adottato, fare la sua scelta mentre prepara la lezione, ma non palesare ad allievi di scuola secondaria i pareri alternativi, se non esplicitamente richiesto dalla classe.

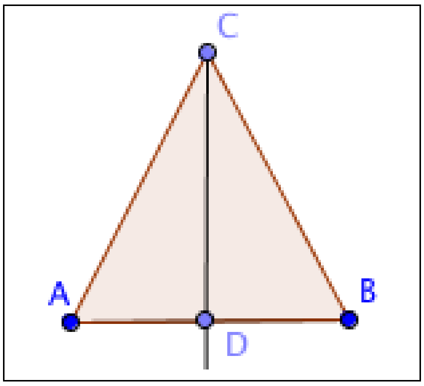
I triangoli isosceli esistono e si possono costruire così: sia dato un segmento AB e si consideri il suo asse. Per ogni punto C dell'asse di un segmento AB si ha AC = BC, quindi ABC è isoscele.
Infatti, detto M il punto medio, i due triangoli AMC e CMB hanno gli angoli di vertice M retti, quindi congruenti, il lato MC in comune e i lati AM ed MB congruenti, perché M è il punto medio. Per il primo criterio di congruenza, i due triangoli sono congruenti, quindi per il postulato sui triangoli congruenti segue che anche i terzi lati, ossia AC e CB, sono congruenti.

Naturalmente, lo stesso tipo di classificazione dei triangoli si può fare rispetto agli angoli:

- *equiangoli*: tutti e tre gli angoli sono congruenti
- *iso…*: (almeno) due angoli sono congruenti
- *….*: tre angoli a due a due non congruenti.

Non so se esista un nome per il secondo ed il terzo caso.

Comunque, Euclide mostra poi che le due classificazioni sono coincidenti, nel senso che ogni triangolo isoscele ha due angoli congruenti e viceversa, e la dimostrazione del primo fatto è immediatamente basata sul primo criterio di congruenza.



Sia AC = CB. Sia CD la bisettrice di $A\hat{C}B$. Allora i due triangoli ACD e DCB hanno due lati e l'angolo compreso congruenti. Pertanto, sono congruenti. Allora hanno anche gli altri angoli e lati congruenti.

In particolare, gli angoli di vertici A e B sono congruenti.

Inoltre, D è il punto medio di AB e i due angoli adiacenti in D sono congruenti e quindi retti. Allora, CD è l'asse di AB.

Conseguenze:

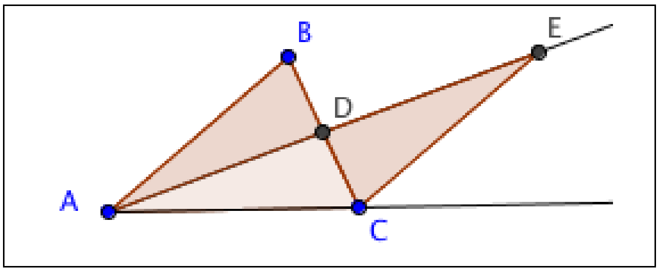
- un punto C è sull'asse di un segmento AB se e solo se AC = BC.
- ogni triangolo equilatero è equiangolo e quindi regolare (se esiste...)

Prima del "viceversa", si compie un certo percorso, che comprende il teorema dell'angolo esterno, coi suoi corollari, poi altri criteri di congruenza.

Gli angoli di un triangolo sono tutti convessi, quindi possiamo costruire per ciascuno di essi i due angoli adiacenti, che sono congruenti fra loro. Sono detti *angoli esterni*.

Euclide dimostra uno dei teoremi più importanti della prima parte della sua teoria:

Ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due interni non adiacenti.

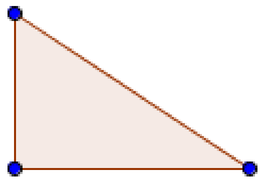
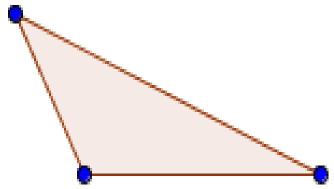
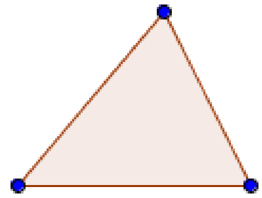


Dimostrazione. Sia D il punto medio di BC. Sulla semiretta AD prendiamo il punto E tale che AD = DE. Allora i triangoli ADB e CDE sono congruenti (i due angoli in D sono opposti al vertice quindi congruenti). Ne segue che l'angolo di vertice B è congruente a $D\hat{C}E$, il quale è incluso nell'angolo esterno di vertice C e lati CB ed il prolungamento di AC, quindi $D\hat{C}E$ è minore di quest'ultimo. Per dimostrare che anche l'angolo in A è minore di questo angolo esterno, basta considerare l'opposto al vertice di quest'ultimo, prendere il punto medio di AC ecc.

Dal teorema dell'angolo esterno si deduce che se un triangolo ha un angolo retto, quindi congruente al suo angolo esterno, gli altri due sono minori, ossia *angoli acuti*.

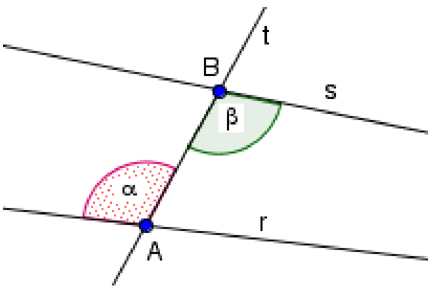
Analogamente, se ha un angolo maggiore di un angolo retto (*angolo ottuso*), quindi maggiore del suo adiacente, gli altri due sono acuti.

Si ottiene così la seguente ben nota classificazione dei triangoli rispetto agli angoli, mostrata insieme con la consueta figura che li rappresenta:

rettangolo: un angolo retto e due acuti	*ottusangolo*: un angolo ottuso e due acuti	*acutangolo*: i tre angoli sono acuti
		

NOTA. Un triangolo rettangolo o ottusangolo può essere isoscele, mentre un triangolo equilatero deve essere necessariamente acutangolo.

Esistenza di rette parallele. Un'applicazione importante del teorema dell'angolo esterno è la seguente, che implica il parallelismo di due rette.



Date due rette r ed s distinte, ed una terza retta t che intersechi r ed s in A e B rispettivamente, chiamiamo *angoli alterni interni* due angoli α, β aventi i vertici in A e B, un lato su t, contenente l'altro punto, e gli altri due lati su r ed s, in semipiani opposti rispetto a t.

Se $\alpha = \beta$ allora r ed s sono parallele.

Se infatti non lo fossero, le rette r ed s avrebbero in comune un punto C, quindi formerebbero un triangolo ABC con un angolo esterno congruente ad uno interno non adiacente. Dunque, r ed s sono parallele.

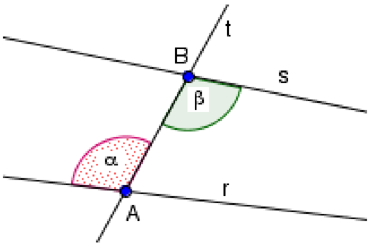
Dati ora un punto P ed una retta r non passante per P, possiamo fissare su r un punto A, prendere uno dei due angoli, sia α, di vertice A e con un lato su t = AP e trasportarlo nel vertice P con un lato su PA, nel semipiano opposto rispetto all'angolo α. Allora abbiamo due angoli alterni interni congruenti α e β, quindi la retta del secondo lato di β è parallela ad r.

Pertanto, il V postulato di Euclide riguarda solo l'unicità e non l'esistenza della parallela per P ad r.

Usando il V postulato, possiamo invertire il teorema degli angoli alterni:

Date due rette parallele r ed s, tagliate da una *trasversale* t nei punti A e B rispettivamente, gli angoli alterni interni α, β che si formano sono congruenti.

Infatti, se non lo fossero, come indicato sopra si potrebbe costruire in B un angolo β' alterno rispetto ad α e congruente ad α. Allora il suo secondo lato s' sarebbe parallelo ad r e passerebbe per B come s, ma diverso da s, contro il V postulato.



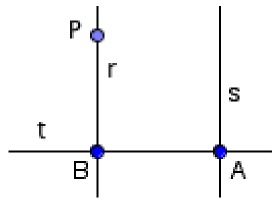
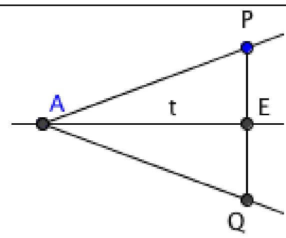
Torniamo alla figura precedente: l'angolo α' opposto al vertice di α è detto *corrispondente* di β. L'angolo α" adiacente ad α nel semipiano contenente B è detto *coniugato interno* rispetto a β. Si parla anche di angoli alterni esterni, coniugati esterni ecc. Dai due teoremi diretto ed inverso sugli angoli alterni interni si deducono le seguenti conseguenze:

- due rette r ed s tagliate da una trasversale t sono parallele se e solo se formano angoli corrispondenti congruenti
- due rette r ed s tagliate da una trasversale t sono parallele se e solo se formano angoli coniugati interni congruenti

e varie altre passando agli angoli opposti al vertice o adiacenti.

Esistenza delle perpendicolari. Prima di tornare ai triangoli, rispondiamo ad un problema posto in precedenza: data una retta t ed un punto P non appartenente ad r, esiste ed è unica una retta r perpendicolare a t e contenente P.

Diamo due diverse dimostrazioni, una con ed una senza l'ausilio del V postulato:

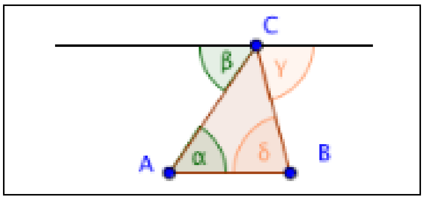
<table>
<tr><td>Preso un punto A su t, consideriamo l'angolo piatto di vertice A nel semipiano contenente P. Tracciamo la sua bisettrice s, che forma quattro angoli retti. La parallela r per P ad s è perpendicolare a t. Sia infatti B il punto intersezione di r con t. In A e B abbiamo allora angoli alterni interni congruenti, ma gli angoli in A sono retti, quindi anche r = PB è perpendicolare a t.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Preso un punto A su t, se AP è perpendicolare a t siamo a posto. Se no, costruiamo sull'altro semipiano un angolo di vertice A congruente all'angolo di lati t e AP e, sul suo secondo lato, un punto Q tale che AQ = AP. Sia E l'intersezione tra PQ e t. Allora AEP = AEQ per il I criterio, quindi AÊP = AÊQ, che, essendo adiacenti, devono essere retti.</td><td>
</td></tr>
</table>

L'unicità segue dal teorema dell'angolo esterno (esercizio).

Allora, rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele. Inversamente, una retta r perpendicolare ad una retta s è perpendicolare ad ogni parallela ad s.

In particolare, la perpendicolarità non è una relazione transitiva.

Dal V postulato segue la notissima proprietà degli angoli interni di un triangolo: la loro somma è un angolo piatto. Questa proprietà è caratteristica della geometria euclidea.



Come mostra la figura qui accanto, dato ABC, basta considerare la parallela per C ad AB e gli angoli alterni interni che si formano: $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$. Si ricava subito che la somma dei tre angoli interni è l'angolo piatto di vertice C che contiene il triangolo.

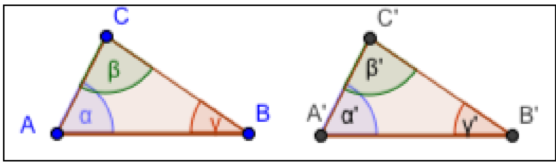
Ne segue che, noti due angoli, si ricava il terzo, per la legge di cancellazione. Inoltre, ogni angolo esterno è somma dei due interni non adiacenti.

NOTA. In altre geometrie, in cui non vale l'assioma delle parallele, questo risultato è falso. Per esempio, nella geometria sulla sfera, presi due meridiani e l'equatore, che sono le nostre "rette", abbiamo due angoli retti più l'angolo fra i meridiani, che può essere per esempio retto a sua volta. Nella geometria affine non esiste addirittura la nozione di angolo, perché tutti i triangoli sono affini tra loro, come forse vedremo più avanti.

La teoria dei triangoli è molto ricca ed interessante, ed in gran parte indipendente dal V postulato, ma conseguenza dei postulati del trasporto, del primo criterio di congruenza e del teorema dell'angolo esterno.

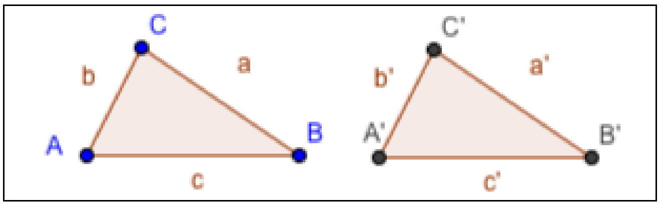
Vedremo ora i principali risultati, con alcune dimostrazioni, ma non tutte, perché questo non è un testo di Geometria razionale. Come già detto, le dimostrazioni proposte non sono né le uniche possibili né le migliori.

II criterio di congruenza. Siano ABC ed A'B'C' due triangoli:



$$a)\ \begin{cases} AB = A'B' \\ \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases} \Rightarrow ABC = A'B'C' \qquad b)\ \begin{cases} AB = A'B' \\ \alpha = \alpha' \\ \gamma = \gamma' \end{cases} \Rightarrow ABC = A'B'C'$$

III criterio di congruenza. Siano ABC ed A'B'C' due triangoli:



$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \Rightarrow ABC = A'B'C'$$

Dimostro solo il II criterio, distinguendo i due casi.

Possiamo trasportare il segmento AB sulla semiretta di origine A' e contenente B', e poiché AB = A'B' allora si ottiene proprio B'. Nel semipiano contenente C' possiamo trasportare l'angolo α nel vertice A' e con un lato su A'B'; poiché α = α' allora l'altro lato si sovrappone alla semiretta A'C'. Su questa trasportiamo AC ottenendo il segmento A'C". Il triangolo A'B'C" è congruente ad ABC per il I criterio. Ciò posto:

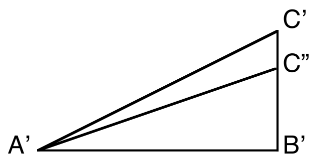
a) Nel primo caso, l'angolo $A'\hat{B}'C''$ coinciderà con l'angolo γ, ma quest'ultimo coincide con l'angolo γ' e dunque le semirette B'C' e B'C" coincidono. Ne segue C" = C' per l'unicità dell'intersezione di due rette. Allora ABC = A'B'C" = A'B'C'.
b) Nel secondo caso, si ha $A'\hat{C}''B' = \gamma = \gamma'$. Se fosse C" ≠ C', il triangolo B'C'C" avrebbe un angolo esterno congruente ad uno degli interni non adiacenti, assurdo. Pertanto, C" = C' e ABC = A'B'C" = A'B'C'.

NOTA. Per la parte b) si potrebbe usare il fatto che in un triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto, quindi $\begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \gamma = \gamma' \end{cases} \Rightarrow \beta = \beta'$ e si ritorna al caso a). Questo però dipende dal postulato delle parallele.

In un triangolo rettangolo i due lati perpendicolari fra loro sono detti cateti, mentre il lato opposto è detto ipotenusa.
Per i triangoli rettangoli c'è un quarto criterio di congruenza, che non vale per gli altri tipi di triangoli:

IV criterio di congruenza. Se due triangoli rettangoli hanno ipotenuse congruenti e un cateto del primo triangolo è congruente ad un cateto del secondo, i triangoli sono congruenti.

Siano ABC ed A'B'C' i due triangoli. L'angolo retto sia rispettivamente nei vertici B e B'. Allora AC = A'C'. Sia AB = A'B' la coppia di cateti congruenti. Sia C" sulla semiretta B'C', di origine B', tale che B'C" = BC. Per assurdo sia C' ≠ C", per esempio BC' > BC".



Il triangolo A'C'C" è isoscele, perché A'C' = AC = A'C". I suoi angoli alla base dovrebbero quindi essere congruenti, quindi acuti, ma uno di essi è adiacente ad un angolo acuto di A'B'C" e quindi è ottuso, assurdo. Allora C" = C' e si ha ABC = A'B'C'.

Prima di vedere una applicazione di questo criterio, diamo una definizione antropomorfica ma comoda: la perpendicolare da un punto P ad una retta r incontri r in un punto H. Chiameremo H *piede* della perpendicolare. Ciò posto,

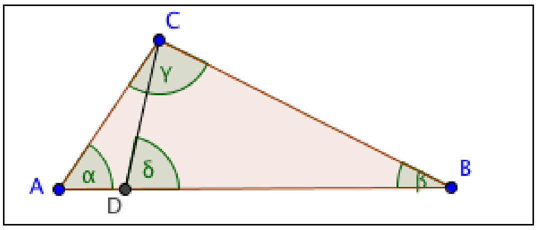
Caratterizzazione della bisettrice di un angolo convesso. Siano O il vertice, r ed s i due lati e P un punto interno. P appartiene alla bisettrice dell'angolo se e solo se, detti H e K i piedi delle perpendicolari da P ai lati, si ha PH = PK.

Per la dimostrazione si osservi inanzi tutto che OPH ed OPK sono rettangoli con l'ipotenusa in comune. Se OK = OH, allora per il IV criterio si ha OPH = OPK, quindi $P\hat{O}H = P\hat{O}K$ e dunque OP è la bisettrice. Inversamente, se P è la bisettrice dell'angolo, si ha $P\hat{O}H = P\hat{O}K$ e i due triangoli sono congruenti per il II criterio, quindi PH = PK.

Oltre al II e III criterio di congruenza ed a quello per i soli triangoli rettangoli, si dimostrano una serie di risultati, che qui riassumo alla rinfusa:

1) In ogni triangolo la disuguaglianza tra due lati corrisponde alla disuguaglianza tra gli angoli opposti e viceversa;
2) In particolare, al lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore e viceversa;
3) La somma di due lati è maggiore del terzo lato;
4) La differenza di due lati è minore del terzo lato.
5) I tre assi dei lati hanno un punto comune, detto *circocentro* del triangolo.
6) Un'*altezza* di un triangolo è la perpendicolare da un vertice al lato opposto. Le tre altezze hanno un punto comune, detto *ortocentro* del triangolo.
7) Le tre bisettrici degli angoli hanno un punto comune, detto *incentro* del triangolo.
8) Una *mediana* è la retta (o anche il segmento) che congiunge un vertice col punto medio del lato opposto. Le tre mediane hanno un punto comune, detto *baricentro* del triangolo[(1)].
9) In un triangolo isoscele questi quattro punti sono allineati
10) In un triangolo equilatero questi quattro punti coincidono.

Riporto qui solo la dimostrazione di alcuni di questi teoremi.

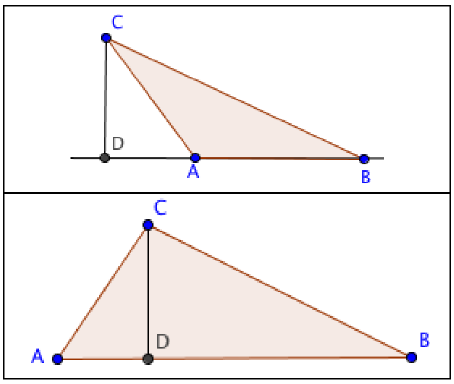


1) Sia dato il triangolo ABC. Gli angoli siano indicati come nella figura. Dimostriamo che AB > CB ⇔ $\gamma > \alpha$. Sia D su AB tale che DB = BC. Allora ADB è isoscele, quindi D$\hat{C}$B = δ. Ma allora, per il teorema dell'angolo esterno: $\alpha < \delta =$ D$\hat{C}$B $< \gamma$.

Inversamente, sia $\gamma > \alpha$. Se fosse AB = CB si avrebbe $\gamma = \alpha$; se CB > AB si avrebbe $\alpha > \gamma$. Dunque, deve essere AB > CB.

2) segue subito da 1).

In particolare, in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore dei cateti.



Per dimostrare la 3) occorre un lemma, che sembra ovvio: in un triangolo ABC, l'altezza relativa al lato maggiore AB lo interseca in un punto interno D. Se D = A o se fosse esterno ad AB, l'essere il triangolo CDB rettangolo ⇒ CB > DB ≥ AB, contro l'ipotesi.

Ciò posto, basta mostrare che il lato maggiore AB è minore di AC+CB e per questo basta osservare che l'altezza CD divide ABC in due triangoli rettangoli ADC e CDB, nei quali si ha AC > AD, BC > BD, quindi AC+BC > AD+DB = AB. Gli altri casi sono ovvi.

---

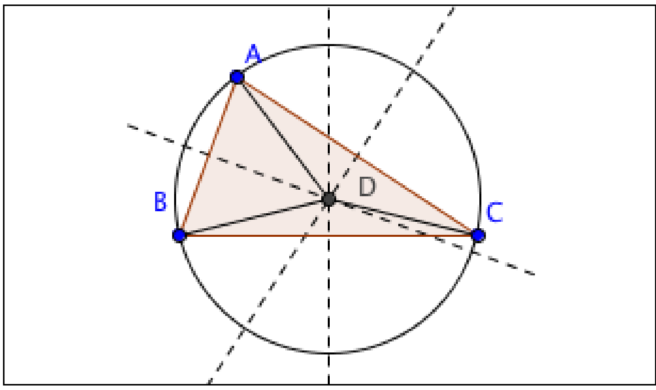
(1) Questa proprietà però si dimostra dopo le proprietà dei parallelogrammi e il *piccolo* teorema di Talete.

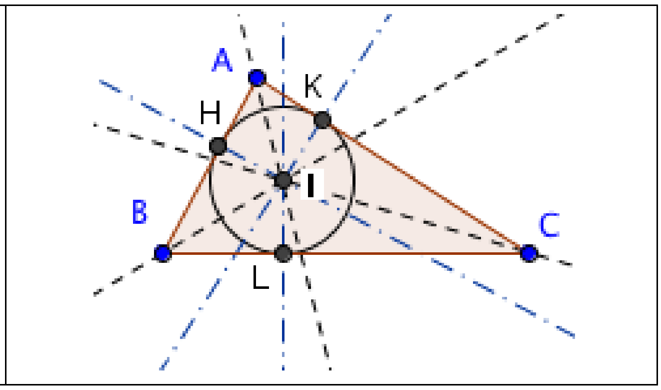
5) L'esistenza del circocentro è assicurata dalla proprietà che ogni punto P dell'asse di un segmento AB è tale che PA = PB. Allora, l'intersezione D degli assi dei lati AB e BC di un triangolo ABC è tale che DA = DB e DB = DC, quindi anche DA = DC e D è sull'asse del terzo lato AC.

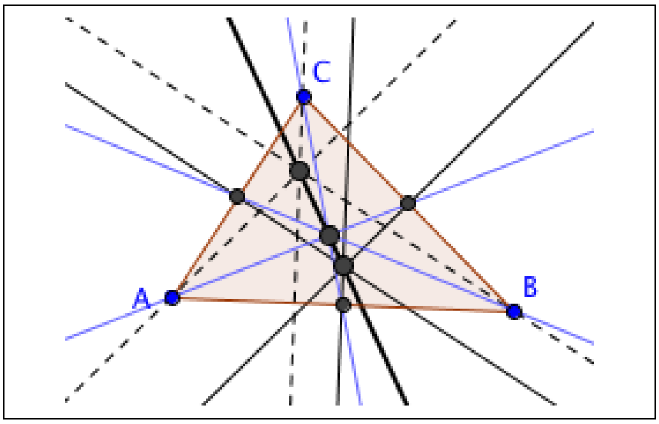
Poiché DA = DB = DC, la circonferenza di centro D e raggio DA contiene i tre vertici del triangolo, ed è detta *circonferenza circoscritta* al triangolo.

6) Analogamente, la caratterizzazione dei punti della bisettrice di un angolo convesso assicura l'esistenza dell'incentro. Detto I l'intersezione di due bisettrici, H, K, L i piedi delle perpendicolari ai lati, si ha IH = IK = IL, dunque I appartiene anche alla terza bisettrice.

Non solo, ma la circonferenza di centro I e raggio IH contiene i tre punti H, K, L, ed è chiamata *circonferenza inscritta* nel triangolo.







Retta di Eulero. Un teorema non presente negli elementi di Euclide ma dimostrato da Eulero è il seguente: **per ogni triangolo ABC non equilatero esiste una retta r passante per il circocentro, l'ortocentro ed il baricentro.**

Nella figura, le altezze sono tratteggiate, le bisettrici in azzurro e i tre punti e la retta d'Eulero in segni ingrossati.

La dimostrazione più semplice che conosco è analitica, e si può fare con l'ausilio di un C.A.S., ossia di un software di calcolo algebrico simbolico, dopo avere collocato gli assi cartesiani nel modo più opportuno.

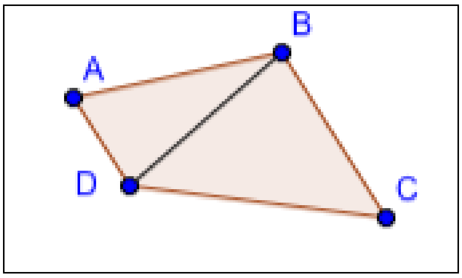
In generale, la retta di Eulero non passa per l'incentro. Se ci passa, il triangolo è isoscele, la retta passa per il vertice comune ai due lati congruenti ed è altezza, mediana, bisettrice ed asse relativo al lato diverso dagli altri due, che spesso è chiamato *base*.

Esistenza di triangoli equilateri: è legata al fatto che la somma dei tre angoli è un angolo piatto. Allora ogni suo angolo è un terzo di angolo piatto, quindi si può prendere un segmento AB, costruire nello stesso semipiano con vertici in A e B e sulle semirette contenenti il segmento AB due angoli congruenti ad un terzo di angolo piatto. Detto C il punto di intersezione degli altri due lati, ABC è equilatero.

Pertanto, esistono poligoni regolari con tre lati.

QUADRILATERI. Un *quadrangolo convesso*, più comunemente detto *quadrilatero convesso*, ha quattro lati, quattro angoli e due diagonali interne al quadrilatero.

Due lati non consecutivi sono detti *opposti*. Analogamente, due angoli senza lati comuni sono detti *opposti*.



Ogni diagonale divide il quadrilatero in due triangoli. Ciascun triangolo ha la somma degli angoli interni uguale ad un angolo piatto. Pertanto, poiché ogni angolo del quadrilatero o è angolo di un triangolo o è somma di due angoli dei due triangoli, la somma degli angoli del quadrilatero è uguale ad un angolo giro.

NOTA. Cominciamo ad intravvedere qualche complicazione nelle nozioni sugli angoli viste finora. Nella somma, l'angolo giro è identificato con l'angolo nullo, ma mi disturba affermare che la somma dei quattro angoli di un quadrilatero è l'angolo nullo.

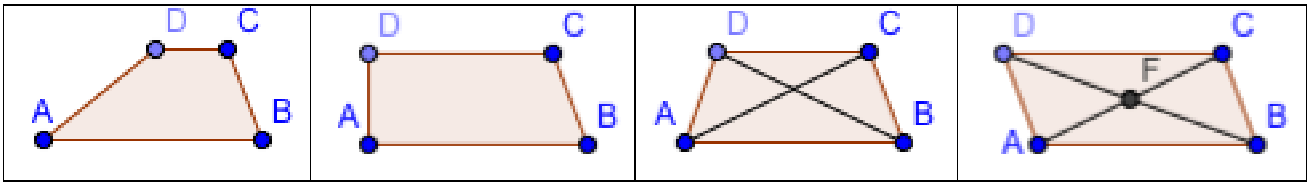
Ora consideriamo quadrilateri particolari, di cui elenco le proprietà senza dimostrazioni.

Trapezi. Per primi si considerano i *trapezi*, caratterizzati dall'avere due lati opposti paralleli. Spesso questi lati sono detti *basi*, mentre gli altri due lati sono detti *obliqui*.

Ne segue che angoli aventi i vertici sugli estremi di uno stesso lato obliquo sono coniugati interni di due parallele tagliate da una trasversale e quindi supplementari.

Se due di questi angoli sono rettangoli, il trapezio è detto *rettangolo*.

Se i due angoli di vertici gli estremi di una base sono congruenti, allora anche gli altri due lo sono, ed il trapezio è detto *isoscele*. In tal caso, i lati obliqui sono congruenti e le diagonali sono congruenti.



Parallelogrammi. Se anche i due lati obliqui sono paralleli, il trapezio è detto *parallelogramma* (o parallelogrammo). In questo caso, le coppie di lati opposti sono entrambe coppie di basi.

Proprietà principali dei parallelogrammi, che li caratterizzano:

a) I lati opposti sono congruenti
b) Gli angoli opposti sono congruenti
c) Le diagonali hanno lo stesso punto medio
d) Sono trapezi con due basi congruenti

Le dimostrazioni sono basate semplicemente sui criteri di congruenza dei triangoli.

Tra i parallelogrammi ce ne sono alcuni più notevoli:

a) I *rettangoli* hanno un angolo retto, quindi anche gli altri sono retti. Le diagonali sono congruenti. Sono quindi particolari trapezi isosceli. Inoltre, gli assi dei lati passano per il punto medio delle diagonali.
b) I *rombi* hanno i quattro lati congruenti. Le loro diagonali sono perpendicolari e bisettrici degli angoli da cui escono.
c) I *quadrati* sono contemporaneamente rombi e rettangoli. Sono quindi i quadrilateri regolari.

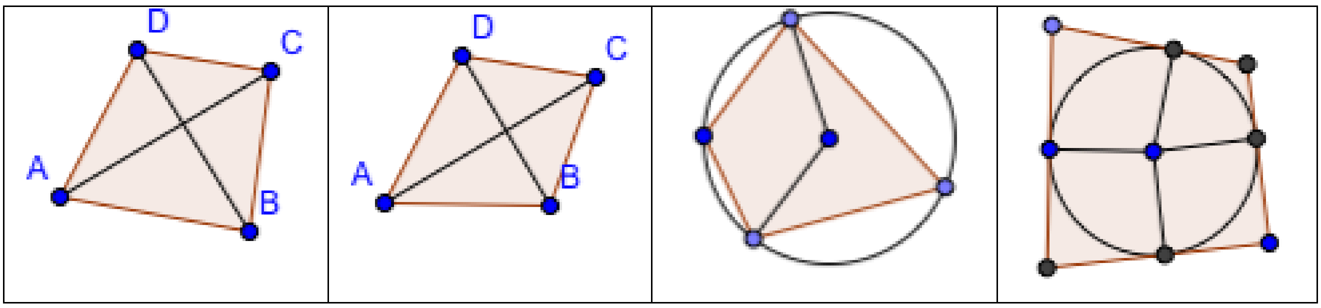
Altri quadrilateri notevoli:

Quelli che hanno le *diagonali perpendicolari* non mi pare abbiano un nome.

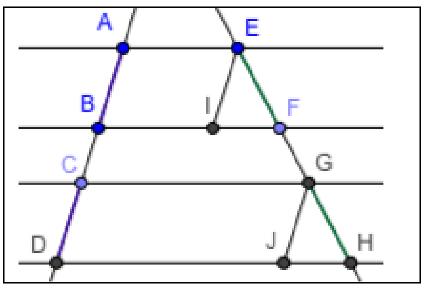
Tra essi ci sono quelli in cui una diagonale li divide in due triangoli isosceli. Sono detti *deltoidi* o *aquiloni*. Tra questi, ci sono anche i rombi, in cui i due triangoli isosceli sono congruenti.

I *quadrilateri inscrittibili* sono quelli i cui vertici appartengono ad una circonferenza. Si dimostra che gli angoli opposti devono essere supplementari. Tra essi ci sono i trapezi isosceli e quindi i rettangoli.

I *quadrilateri circoscrittibili* possiedono un punto interno O tale che, condotte da esso le perpendicolari ai lati e detti H, K, L, M i loro piedi, Si ha OH = OK = OL = OM. Una circonferenza di centro O contiene quei quattro punti. Si può dare una condizione sui lati, ma non ora. Aquiloni e rombi sono circoscrittibili.



IL PICCOLO TEOREMA DI TALETE



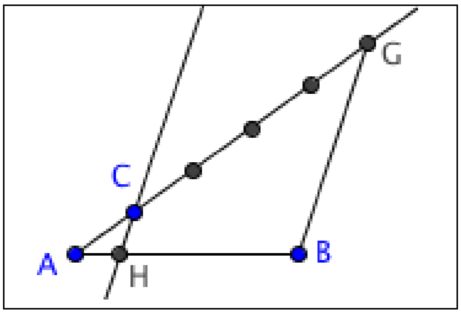
Dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, a segmenti congruenti sull'una corrispondono segmenti congruenti sull'altra.

Con riferimento alla figura qui accanto per i simboli, supponiamo AB = CD e dimostriamo che EF = GH.

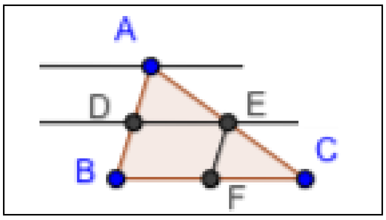
Da E e da G mandiamo le parallele alla prima trasversale. Allora i quadrilateri ABIE e CDJG hanno i lati paralleli, quindi sono parallelogrammi e dunque EI = AB = CD = GJ. Inoltre, gli angoli corrispondenti $I\hat{E}F$ e $J\hat{G}H$ sono congruenti poiché EI e GJ sono parallele. Infine, anche gli angoli corrispondenti $J\hat{H}G$ e $I\hat{F}E$ sono congruenti, perché JH e IF sono parallele. Allora per il II criterio di congruenza, EIF = GJH, quindi EF = GH.

Per induzione si può dimostrare che, di conseguenza, per ogni n ≥ 1, se CD = nAB allora anche GH = nEF. Ancor più in generale, $CD = \frac{m}{n}AB \Rightarrow GH = \frac{m}{n}EF$

Una applicazione del piccolo teorema di Talete: la suddivisione di un segmento AB in $n \geq 2$ segmenti congruenti. Su una semiretta di origine A e non allineata con AB si fissi un punto C e si prenda il punto G tale che AG = nAC. Tracciata la retta GB, la parallela per C a BG interseca AB in un punto H e si ha AB = nAH.



Possiamo adesso ottenere altre proprietà dei triangoli:

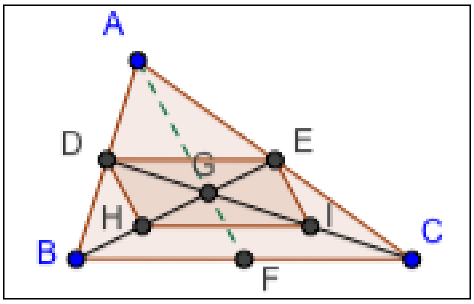


a) Sia ABC un lato e sia D il punto medio di AB. La parallela per D al lato BC incontri AC nel punto E. Allora E è il punto medio di AC ed è metà di BC.

Basta considerare la parallela per A a BC, e poiché AD = DB allora per il piccolo teorema di Talete segue AE = EC. La parallela per E ad AB interseca BC in F, che per la stessa ragione è il punto medio di BC. Il quadrilatero DEFB ha i lati opposti paralleli, quindi è un parallelogramma ed allora si ha DE = BF = metà di BC.

b) Esistenza del baricentro di un triangolo ABC.

Tracciamo le mediane BE e CD e sia G il loro punto di intersezione. Siano H ed I i punti medi di BG e CG. Considerato il triangolo BGC, il segmento HI è parallelo e congruente a DE, perché entrambi paralleli a BC e congruenti alla sua metà. Allora DHIE è un parallelogramma, quindi G è il punto medio di HE e di DI.



Ne segue che la mediana CD divide la mediana BE in due segmenti BG e GE, il primo doppio dell'altro. Lo stesso fa naturalmente la terza mediana AF, quindi anche AF interseca BE nel punto G. Dunque, G è intersezione delle tre mediane.

NOTA. Il punto G è il baricentro fisico di tre masse uguali puntiformi poste nei tre vertici A, B, C. Si dimostra che è anche il baricentro fisico del triangolo ABC ritagliato in una lamina omogenea come materiale e come spessore. Invece, il baricentro fisico della poligonale formata dai tre lati (purché di materiale e spessori omogenei) è l'incentro.

Il *perimetro* di un poligono è il segmento somma dei suoi lati. La sua esistenza segue dal postulato del trasporto dei segmenti.

Angoli di un poligono. Per un poligono (convesso) con n lati, con $n > 3$, oltre al numero delle diagonali, già calcolato a suo tempo, possiamo aggiungere qualche altra proprietà: conduciamo da un fissato vertice le n–3 diagonali; il poligono è allora suddiviso in n-2 triangoli. La somma degli angoli interni di ciascun triangolo è un angolo piatto, e gli angoli del poligono sono o angoli di questi triangoli, o somme di loro angoli, quindi verrebbe da concludere che la somma degli angoli interni di un poligono con n lati è n-2 angoli piatti.
Questo però ci porta a cambiare la definizione di angolo o quella di somma.
Come sentito nel seminario sugli angoli, i testi di scuola secondaria generalmente glissano su questa incongruenza.
Seguendo i Sumeri, possiamo dividere l'angolo retto in 90 parti uguali, dette *gradi*. Allora, l'angolo retto è 90 gradi, e scriviamo 90°. L'angolo piatto è 180°, quello giro è 360° e quello nullo è 0°. Gli angoli del triangolo equilatero sono 60° e quelli acuti di un triangolo rettangolo isoscele sono 45°.
Ma la metà di un angolo di 45°? Si entra in un terreno scivoloso. I Sumeri dividono l'angolo 1° in 60 parti uguali, dette *primi*. Un primo è denotato con 1'. Allora, la metà dell'angolo 45° è 22°30'. E poi, i primi furono divisi in 60 parti uguali dette *secondi d'arco*.
Si trovano quindi angoli tipo 57°15'18".
Chiamiamo misura in gradi sessagesimali questa espressione.
Ma tutti gli angoli sono riferibili a gradi, primi e secondi? Chissà cioè se tutti gli angoli hanno la misura? Su questo problema torneremo più avanti.
Per ora accordiamoci nel sommare le misure degli angoli che ce l'hanno. Un angolo piatto è 180°, pertanto la somma degli angoli interni di un poligono con n lati diremo che è $(n-2)\cdot 180°$.

In ogni vertice possiamo considerare l'angolo esterno, supplementare di quello interno adiacente. Tra angoli interni ed esterni abbiamo allora come somma $n\cdot 180°$. Togliamo la somma degli angoli interni: restano due angoli piatti, ossia 360°.

Congruenza di poligoni. Due poligoni, sono congruenti se e solo se esiste una biiezione tra gli insiemi dei loro vertici, che ne induce una fra i lati e gli angoli, tale che lati corrispondenti siano congruenti e angoli corrispondenti siano congruenti.
Assioma, definizione o teorema?

Definizione no, perché abbiamo detto che la congruenza è una relazione d'equivalenza nell'insieme delle figure e quindi la classe di un dato poligono ce l'abbiamo già. Pertanto, possiamo postulare chi c'è nella sua classe, sperando che non sia in contraddizione con gli altri postulati, oppure dimostrare che la nostra proposizione è conseguenza di tutto ciò che la precede, ed abbiamo un teorema.

In ogni caso, possono essere congruenti solo poligoni con lo stesso numero di lati.

Inoltre, come per i triangoli, sicuramente esistono criteri di congruenza, che richiedano meno condizioni.

Una proprietà che hanno tutti i poligoni è la seguente: ogni lato è minore della somma degli altri.

Per dimostrarla la generalizziamo nel modo seguente: siano A e B due punti distinti e sia data una poligonale che ha come primo ed ultimo estremo A e B. La somma dei suoi lati, che chiameremo *lunghezza della poligonale*, è maggiore di AB.

Infatti, se la poligonale ha due lati, AC e CB, per le proprietà dei triangoli si ha AC+CB > AB.

Per induzione, supponiamo che la poligonale abbia n+1 lati, con $n \geq 2$. Siano AC, CD i primi due lati. Allora AD < AC+CD, e la nuova poligonale che ha come primo lato AD e gli altri coincidenti con la precedente ha un lato in meno e lunghezza inferiore. Per l'ipotesi induttiva, tale lunghezza è maggiore di AB, quindi a maggior ragione lo è la lunghezza della poligonale data.

Poligoni notevoli:

Poligoni circoscrittibili ad una circonferenza: sono quelli in cui le bisettrici degli angoli hanno un punto comune I. In tal caso, infatti, i segmenti che congiungono tale punto con i piedi delle perpendicolari ai lati sono tutti congruenti, quindi i piedi di tali perpendicolari appartengono ad una stessa circonferenza di centro I, detta *inscritta* nel poligono. Il raggio di tale circonferenza è spesso chiamato *apotema* del poligono.

Poligoni inscrivibili in una circonferenza: sono quelli in cui gli assi dei lati hanno un punto O in comune. I segmenti che congiungono tale punto con i vertici sono congruenti, quindi i vertici appartengono ad una circonferenza di centro O, detta *circoscritta* al poligono.

Le due proprietà precedenti per poligoni con più di tre lati possono non coesistere, come già accade per i quadrilateri.

Poligoni coi lati congruenti o *con gli angoli congruenti*. Nel primo caso, il perimetro è multiplo n-esimo di un lato. Nel secondo caso, detto α un angolo, si ha l'uguaglianza $n\alpha = (n-2)180°$, quindi $\alpha = \frac{(n-2)}{n}180°$.

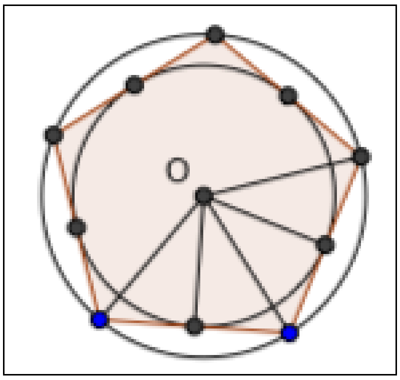
Anche queste due proprietà per poligoni con più di tre lati possono non coesistere.

Poligoni regolari: hanno i lati congruenti e gli angoli congruenti.

Ne segue che due poligoni regolari sono congruenti se e solo se hanno lo stesso numero di lati e lo stesso lato.

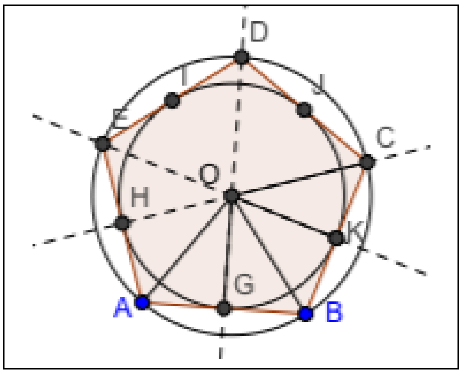
TEOREMA. Un poligono è regolare se e solo se ha la circonferenza circoscritta e quella inscritta e per di più con lo stesso centro.

Dimostrazione. Premettiamo che se due triangoli isosceli ABC, A'B'C' sono tali che AC = CB = A'C' = C'B' ed inoltre le altezze CH e C'H' sono congruenti, allora i due triangoli sono congruenti, per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. Allora si ha AB = A'B' e $B\hat{A}C = A\hat{B}C = B'\hat{A}'C' = A'\hat{B}'C'$.



Ciò posto, consideriamo un poligono avente le circonferenze inscritta e circoscritta e con lo stesso centro O. Consideriamo due lati consecutivi e congiungiamo i loro estremi col centro O: i tre segmenti sono raggi della circonferenza circoscritta, quindi congruenti ed abbiamo due triangoli isosceli. I due segmenti che congiungono O coi piedi delle perpendicolari ai due lati opposti sono raggi della circonferenza inscritta, quindi sono congruenti. Allora i due triangoli isosceli sono congruenti, e lo sono quindi i due lati del poligono. Lo stesso si può ripetere per tutti gli altri lati. Ma anche gli angoli sono congruenti, perché doppi degli angoli "alla base" dei triangoli isosceli. Dunque il poligono è regolare.

Inversamente, supponiamo che il poligono sia regolare e dimostriamo che esistono le due circonferenze inscritta e circoscritta e che hanno lo stesso centro. Se ha tre lati è vero, quindi supponiamo n ≥ 4 lati. Riferendoci ai simboli nella figura, prendiamo due lati consecutivi AB e BC e sia O il punto intersezione dei loro assi. La circonferenza di centro O e raggio OA contiene tutti e tre i vertici A, B, C. I due triangoli AOB e BOC sono isosceli e congruenti per il III criterio. Dunque le altezze OG e OK sono congruenti, e la circonferenza di centro O e raggio OG contiene anche K.



Inoltre, OB è bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$. Pertanto si ha $B\hat{A}O = \frac{1}{2}A\hat{B}C = \frac{1}{2}B\hat{A}E$, quindi OA è la bisettrice di $B\hat{A}E$. Allora, ricordando che AE = AB, segue OEA = BOA per il I criterio di congruenza dei triangoli. In particolare si ha OE = OA ed anche OH = OG ed OH è l'asse di EA. Pertanto, la circonferenza di centro O e raggio OA contiene anche E, mentre quella di raggio OG contiene anche H.

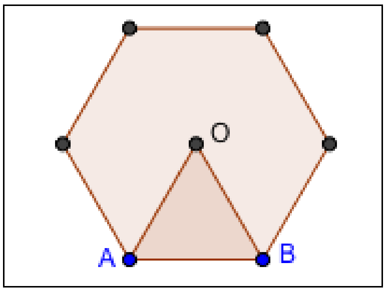
Ripetiamo ora il ragionamento a partire dai lati consecutivi EA ed AB, di cui OG ed OH sono gli assi, e così via fino ad esaurire tutti i lati. Allora il punto O è il centro cercato delle due circonferenze inscritta e circoscritta al poligono.

In alcuni casi si può dire qualcosa sui due raggi.

Nel caso del *quadrato,* l'apotema è metà del lato.

Nel caso dell'*esagono regolare*, il raggio della circonferenza circoscritta è congruente al lato.

Infatti, detto AB un lato ed O il centro, si ha $A\hat{O}B = \frac{1}{6}360^\circ = 60^\circ$, quindi i tre angoli del triangolo isoscele AOB devono essere congruenti e AOB è equilatero. Allora, OA = AB.



Nel caso del triangolo equilatero, i due centri coincidono col baricentro, quindi il raggio della circonferenza circoscritta è doppio dell'apotema.

Negli altri poligoni regolari, le relazioni fra lato e raggi delle due circonferenze non è così semplice. La parte della Geometria che affronta tra gli altri questo problema è la *Trigonometria*.

GENERALIZZAZIONE. Finora abbiamo considerato poligoni convessi. Possiamo però immaginare delle costruzioni che ci danno poligoni di altro genere.

Per esempio, fissato un lato AB e preso un segmento CD incluso in AB, nel semipiano opposto a quello del poligono dato consideriamo un poligono di cui CD sia un lato. L'unione dei due poligoni ha per contorno una poligonale chiusa, ma non è in generale un poligono convesso.

Se per esempio C = A, potrebbe anche accadere che i lati di vertice A siano adiacenti. In tal caso, consideriamo come lato la somma dei due.

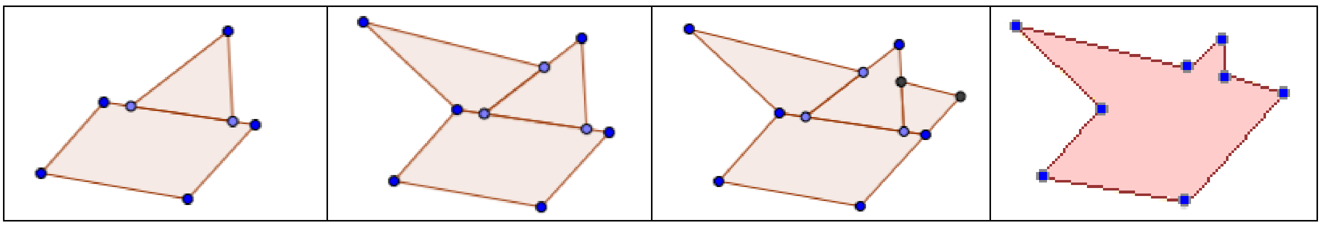
Continuiamo a chiamare *poligono* anche quello che abbiamo ottenuto.

Se il nuovo poligono ha un angolo concavo di vertice A, possiamo prendere due punti B e C sui lati di cui è estremo, e considerare un poligono convesso contenuto nell'angolo convesso $B\hat{A}C$ e con due lati AC e BC.

Possiamo continuare questi procedimenti, purché ogni nuovo poligono che aggiungiamo abbia in comune col poligono del passo precedente *solo lati di una poligonale*.

Il discorso è confuso? Ogni lettore cerchi di spiegarlo meglio quando dovrà insegnarlo.

Comunque, diciamo che il poligono finale è *somma* di quelli che via via abbiamo unito.



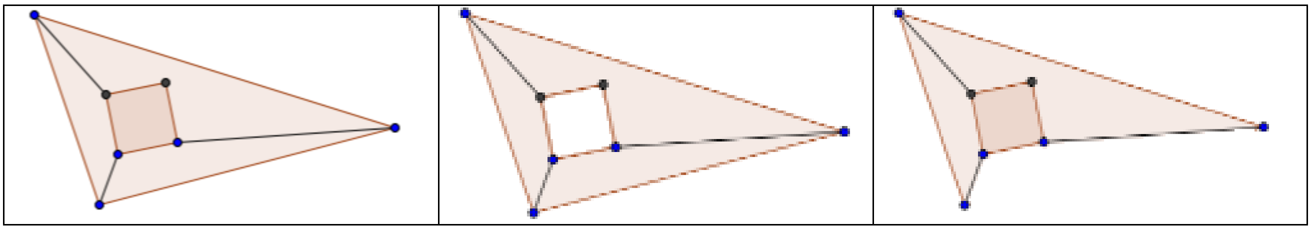
In particolare, possiamo dire che **ogni poligono, convesso o no, è somma di triangoli**, per esempio quelli ottenuti tracciando le diagonali da un vertice.

Parliamo di somma, ma non è una operazione compatibile con la congruenza.

Se un poligono α è somma di altri due, β, γ, scriviamo pure $\alpha = \beta + \gamma$.

In tal caso, possiamo anche scrivere $\beta = \alpha - \gamma$, ossia parlare di *differenza*, ma non è così ovvio spiegare come funziona.

Per esempio, il triangolo seguente è somma di tre quadrilateri convessi e di un pentagono concavo. Se togliamo la parte interna al quadrilatero centrale, resta una figura delimitata da due poligonali chiuse, ossia un triangolo con un buco interno. È ancora un poligono?



E se togliamo uno degli altri addendi, basta togliere i suoi punti interni, o anche l'interno del lato che coincide con un lato del triangolo, lasciando solo gli estremi? È una *zona grigia*, per ora.

Torneremo sulla scomposizione dei poligoni nel prossimo capitolo.

Concludo con un accenno ad problema interessante: la *tassellazione del piano*, ossia il poter rivestire l'intero piano come somma di poligoni.

Ovviamente è (teoricamente) possibile in infiniti modi, ma se si pretende di farlo con poligoni congruenti fra loro, diventa più difficile.

- Si può fare con quadrati congruenti: in ogni vertice concorrono quattro quadrati, perché $90^\circ = \frac{1}{4}360^\circ$. Le mattonelle del pavimento di solito sono quadrate.
- Si può fare con esagoni regolari: in ogni vertice concorrono tre esagoni, perché l'angolo di un esagono regolare è $\frac{4}{6}180^\circ = 120^\circ = \frac{1}{3}360^\circ$. Le celle delle api sono esagoni regolari.
- Infine, si può fare con triangoli equilateri, il cui angolo è $60^\circ = \frac{1}{6}360^\circ$, ed in ogni vertice ne concorrono sei.
- Nessun altro tipo di poligono regolare è adatto, perché in ogni vertice devono esserci almeno tre poligoni, ma tre pentagoni sono pochi, quattro troppi e, per n ≥ 7, tre sono troppi.